



PIZZOFALCONI



NAZIONALE

B. Prov.

VJ

222

NAPOLI

VITT. EM. III

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



Palchetto

Num.° d'ordine



118
2

B. Prov.

VI

232

16072

TRAITÉ ANALYTIQUE

DES SECTIONS CONIQUES,

FLUXIONS ET FLUENTES.

AVEC UN ESSAI SUR LES QUADRATURES,
ET UN TRAITÉ DU MOUVEMENT.

PAR M. MULLER, Professeur de Mathématiques à l'Ecole Royale
de Volwich, traduit de l'Anglois par l'Auteur.



A PARIS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour
l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



P R É F A C E.

L'EXCELLENCE des Mathématiques en général, & de leurs parties en particulier, que l'on traite dans cet Ouvrage, a été si bien établie par plusieurs Auteurs célèbres, qu'il seroit fort inutile d'en relever les précieux avantages. Aussi ne se propose-t-on dans cette Préface que de donner les raisons qui ont engagé à écrire sur des sujets déjà épuisés en apparence par plusieurs habiles Mathématiciens.

Mon premier dessein, lorsque je composai cet Ouvrage, étoit d'éclaircir les principes de Mathématiques sur la Philosophie Naturelle du Chevalier, Newton, & je me croyois bien récompensé de mon travail, si je pouvois y réussir. Comme il y a un grand nombre de propriétés des Sections Coniques, qui sont nécessaires pour bien entendre ces principes, dont la plus grande partie n'a été développée par aucun Auteur, du moins que je connoisse, j'ai été obligé de rechercher ces propriétés; cela n'a pu s'exécuter qu'en mettant sous les yeux toute la théorie des Sections Coniques. Car ces Sections ayant la plupart les mêmes propriétés, qui ne diffèrent presque que par la position de quelques lignes, on ne peut les traiter séparément, sans perdre cette liaison qui se trouve entr'elles. Autrement les démonstrations sont non seulement multipliées en vain, mais encore le sujet en devient en même temps plus obscur & très-embarrassant. Voilà pourquoi les plus sçavans Géomètres les ont considérées toutes trois ensemble, & alors la même démonstration sert pour toutes, excepté dans quelques cas: c'est aussi ce que je fais dans la première partie de cet Ouvrage, où je donne des démonstrations particulières de la parabole, afin d'éviter le mot infini qui pourroit embarrasser les commençans. Dans mes planches, les mêmes lignes sont marquées par les mêmes lettres, & lorsque je me sers de l'Algebre, elles sont aussi marquées par les mêmes lettres, de sorte qu'il ne faut retenir que cinq ou six lettres pour

lire cette premiere partie. Au reste, je ne fais usage de l'Algebre que dans des cas où j'ai cru rendre les démonstrations plus courtes & plus faciles, & j'ai préféré la synthese à l'analyse, lorsque cela a pu se faire.

Quoique le Trairé des Sections Coniques du Marquis de l'Hôpital soit un ouvrage excellent dans son genre, cependant il y a bien des propriétés de ces courbes fort remarquables qu'il n'a pas données, & les autres étant traitées séparément & en différens endroits, l'étude en devient plus ennuyeuse & plus pénible qu'elle le seroit, si elles étoient rassemblées comme elles devroient l'être. Outre cela, ses définitions ne sont pas absolument exactes; car il en donne une différente de la même chose dans chaque section. Par exemple, dans la parabole il dit. *Toutes lignes menées des points de la parabole parallèlement à l'axe, sont les diametres.* Et dans l'ellipte, *toutes lignes droites qui passent par le centre, & qui sont terminées de part & d'autre par l'ellipse, sont appellées diametres.* Il fait la même chose à l'égard du foyer & de quelques autres lignes; au lieu de définir les diametres & les foyers par quelque propriété générale dans quelques courbes où ces lignes & ces points puissent se trouver,

Dans mon second Livre, je donne les premiers principes de la méthode des Fluxions, d'une maniere tout-à-fait différente de toutes celles qui ont été employées jusques ici: car rien n'est plus répréhensible que cette méthode de faire entrer des quantités infiniment petites dans ce calcul: il en a résulté déjà une si grande obscurité dans le raisonnement, que bien des commençans se sont rebutés & persuadés qu'il n'étoit pas possible d'en déduire des principes certains, comme on le prétendoit. En effet, lorsqu'il faut trouver la fluxion d'une quantité variable élevée à une puissance quelconque, la maniere ordinaire est d'ajouter cette quantité à une autre infiniment petite, & d'élever la somme à la puissance donnée; & après avoir ôté le premier terme, on divise le reste par cette petite quantité: il faut donc rejeter tous les termes, excepté le second, qui doit exprimer la fluxion cherchée; & on ne conçoit pas que la somme infinie des termes qu'on rejette soit si petite à l'égard du seul terme que l'on garde, qu'on les puisse négliger sans aucune erreur. L'imagination se révolte: on perd l'idée de l'exactitude géométrique, sans concevoir la moindre idée de justesse des principes qu'on tâche d'établir. Pour rendre donc ces principes plus à portée des

commençans, je considere les courbes décrites par le mouvement d'un point, poussé par deux puissances dans des directions différentes, l'une parallele aux abscisses, & l'autre parallele aux appliquées; & je démontre que, si ce point continuoit avec une vitesse uniforme & égale à celle qu'il a dans un point de la courbe quelconque, il décrirait une ligne droite, qui seroit tangente à la courbe en ce point: delà on peut conclure que la direction du point en mouvement est dans la tangente de la courbe en ce point. Par conséquent les directions des deux puissances, & celle du point étant connues dans un point quelconque, la raison des vitesses de ces puissances sera aussi connue. Or la vitesse dans la direction des abscisses étant à la vitesse dans la direction des appliquées, comme la soutangente est à l'appliquée correspondante, le rapport de ces vitesses étant donné, la nature de la courbe peut être trouvée, ou la nature de la courbe étant donnée, la relation entre ces vitesses peut être trouvée.

C'est de ce principe que se déduit la maniere de trouver les fluxions des quantités variables, sans rejeter aucune chose; & je donne ensuite les regles ordinaires, pour trouver les plus grandes & les moindres des quantités, les rayons des développées & les caustiques par réflexion & par réfraction: en ne se servant que des lignes finies pour exprimer la relation entre les fluxions: j'ai eu grand soin surtout de distinguer, lorsqu'on cherche les plus grands & les moindres, la quantité que l'on trouve, si c'est un plus grand en effet ou non; car comme la même regle donne l'une & l'autre, & souvent plusieurs ensemble, il est absolument nécessaire de sçavoir si l'on a trouvé ce que l'on cherche, & lorsqu'il y en a plusieurs, lequel doit être pris par préférence; ce que personne que je sçache n'a eu soin de faire. Comme le sujet de ce second Livre a été traité par le Marquis de l'Hôpital, & d'autres Ecrivains, je ne pouvois éviter de répéter une partie de ce qu'il a dit dans ses *Infinimens Petits*, surtout ce qui regarde les caustiques: je dirai plus, je conviens que j'ai pris de lui ce que je ne pouvois pas mieux traiter.

Je parle dans le troisieme Livre des Fluentes: d'abord je commence par poser des regles sur ce qu'il y a de plus aisé, & après avoir donné quelques exemples, afin de les mieux comprendre, je donne ensuite une formule générale des fluentes qui peuvent être exprimées en un nombre fini de termes, ou de celles qui dépendent de la quadrature des Sections Coniques: cela m'a

obligé de faire six Tables contenant les fluentes des cas particuliers de la formule générale, absolument générale à bien des égards ; j'ai encore eu soin de donner plusieurs exemples pour rendre facile & aisée l'usage de ces Tables, d'autant plus qu'elles dépendent des principes de M. Cotes, qui ne sont pas encore si bien connus qu'ils méritent de l'être, principalement en France. Je donne ensuite les méthodes de trouver les espaces terminés par des courbes & des lignes droites, les surfaces & les solides décrits par la révolution des courbes autour d'un axe ; & pour ne laisser rien à deviner aux commençans, je joins à chaque solution des exemples numériques ; car il arrive bien souvent que l'on croit entendre les regles ; cependant quand on veut sçavoir les valeurs en nombres, on est surpris de ce qu'on ignore comment il faut s'y prendre. Ainsi un Auteur ne sçauoit prendre trop de précaution pour rendre les regles générales les plus familières qu'il est possible. Enfin il est question dans ce troisième Livre, de la maniere de déterminer les centres de gravité, d'oscillation & de percussion, avec un grand nombre d'exemples sur chacun : on trouvera dans la cinquième section un grand nombre de problèmes Physico-Mathématiques, la plupart nouveaux, & qui ont pour objet l'Architecture ou le Génie ; ce qui finit le Livre tel qu'il a été imprimé en Anglois. J'ai ajouté à cette traduction deux nouveaux Traités, l'un sur la Quadrature des Courbes, & l'autre sur les loix du Mouvement ; & comme ils n'ont pas encore été publiés, & qu'ils contiennent des choses très-intéressantes, je vais en donner un précis.

Monsieur Cotes, dans son excellent Traité *De Harmoniâ mensurarum*, a donné une nouvelle maniere de trouver les fluentes des fluxions qui se peuvent réduire à la quadrature des Sections Coniques, par le moyen de la division de la circonférence du cercle en un certain nombre de parties égales ; & comme il a omis la démonstration, M. de Moivre en a publié une dans son Traité de *Miscellanea Analytica* ; mais il s'est servi d'une méthode particuliere qui n'étoit point assez générale, & rendoit les démonstrations des cas particuliers fort longues & ennuyeuses. Après M. de Moivre, M. Klinckschiern, sçavant Suédois, donna sans démonstration, dans les *Transactions Philosophiques*, la fluente d'une fraction dont le dénominateur est un trinôme, & l'exposant de l'inconnue un nombre entier quelconque. Cette maniere de trouver les fluentes est fort curieuse ; c'est ce qui m'a

engagé à la développer dans cet Ouvrage, où j'ai tâché de rendre les principes aussi clairs & aisés que le sujet pouvoit le permettre : à cette fin je fais voir comment la partie des fluentes qui dépend de la quadrature des Sections Coniques, pouvoit être réduite en pratique par le moyen des Tables de logarithmes, & des sinus & tangentes, & je n'ai rien négligé pour rendre cette méthode très-facile.

Le Traité du Mouvement est divisé en deux parties. La première a pour objet celui qui se fait dans un milieu sans résistance. Je donne d'abord quelques théorèmes sur les principes du mouvement en général ; je joins à cela un problème général sur le mouvement d'un corps qui est attiré ou poussé vers un point fixe, duquel on peut déduire tout ce qu'on peut dire sur les forces centripètes & centrifuges ; & dans l'application je démontre le système du Chevalier Newton ; savoir, que les orbes des Planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ; que les aires décrites par le rayon tiré du point fixe au centre du corps, sont comme les tems écoulés, & que les quarrés des tems périodiques sont comme les cubes des distances moyennes. Je fais ensuite l'application de ces regles pour trouver les résistances des Planètes au Soleil, exprimées en demi-diamètres de la terre. Je me suis servi pour cela des observations Astronomiques les plus récentes & les plus approuvées, suivant la manière de trouver les diamètres des Planètes, par le moyen de leurs diamètres apparens ; leurs solidités & densités, comparés à celles de la terre ; & je trouve que le Soleil est presque un million de fois plus grand que la terre, en supposant que sa parallaxe est de dix secondes & demie, comme les meilleures observations la donnent. Je finis enfin cette première partie par la recherche de la figure de la terre. Comme presque tous ceux qui l'ont traitée ne s'accordent point sur le rapport entre l'axe & l'équateur, nonobstant toutes les observations sur la longueur du pendule à secondes, dans différentes latitudes, & les mesures d'un degré de méridien, que les Mathématiciens François ont faites dernièrement au Nord & sous l'Equateur, il est assez surprenant que ces Messieurs, qui ont été employés dans ces mesures, diffèrent tant dans la détermination de ce rapport. M. Clairaut (*) voulant suivre

(*) Voyez dans cet Ouvrage les raisons sur lesquelles M. Muller se fonde en attaquant M. Clairaut, & la réponse de cet Auteur, page 191 & suiv. Comme il prétend que M. Muller traite cavalièrement une manière qu'il lui reproche de ne

la méthode de Maclaurin & de Simpson, entre dans des calculs très-longs & très-pénibles, & cela afin de trouver le même rapport, sans avoir peut-être assez examiné si ses principes s'accordent avec les différentes mesures d'un degré de méridien, faites en France & ailleurs. Car s'il eût fait attention que toute hypothèse, quelque spécieuse qu'elle puisse être, ne sçavoir être vraie, si elle ne s'accorde pas avec l'expérience, il n'auroit pas pris tant de peine à éclaircir & à suivre un calcul aussi ennuyeux que celui des deux Auteurs cités, Maclaurin & Simpson, qui établissent un rapport qui ne s'accorde pas avec leurs propres principes, puisque Simpson donne 231 à 230, pour ce rapport, au lieu de 232 à 231, qui est le rapport le plus proche de ses propres nombres : mais si l'on extrait la racine quarrée de son expression à trois décimales seulement, on trouvera ce rapport de 353 à 352, lequel est bien différent du sien, quoiqu'il soit déduit de son propre calcul ; ce qui fait voir que M. Clairaut n'avoit aucune raison valable de suivre une méthode si incorrecte. Il y a plus, c'est qu'après avoir donné une équation qui renferme ce rapport & la force centrifuge sous l'équateur, M. Clairaut suppose que la force centrifuge à l'équateur est la 289^{me} partie de la force de la gravité, pour avoir le rapport entre l'axe & l'équateur ; & comme ce rapport ne s'accorde pas avec celui trouvé par les Auteurs Anglois, il suppose leur rapport comme véritable, & cherche celui de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, par un grand détour de calcul & de raisonnement non seulement inutile, puisqu'il l'auroit pu trouver par la même équation, mais encore fort douteux. En effet, il suppose le degré de méridien sous l'équateur de 57438 toises, ce qui est 500 roises plus que celui qu'on a trouvé par la mesure, à moins qu'il ne veuille que ses Confrères se soient trompés d'autant ; ce qui est impossible, comme on le fait voir dans ce Traité.

M. Bouguer, après avoir donné un long détail de ses observations, cherche dans toutes les hypothèses possibles, celle qu'il croit pouvoir servir à trouver la figure de la terre, c'est-à-dire, qu'il cherche quel rapport les arcs, ou leurs sinus, ou leurs puissances, doivent avoir pour répondre aux mesures actuelles ; & il

point entendre, on ne sera point étonné qu'il ait trouvé long & ennuyeux son calcul dans une démonstration qui est pénible par la nature de la question. Quant à l'obscurité, il faut au moins avouer qu'il n'y en a pas dans la manière dont cet Académicien s'exprime sur les argumens de son adversaire.

s'arrête

P R E F A C E.

ix

s'arrête à la supposition que c'est celui du quarré du sinus de la latitude : supposition d'autant plus absurde, qu'en comparant la longueur du Pendule à secondes, qu'il assure avoir mesuré fort exactement, avec les longueurs du même Pendule, qu'on a déterminées dans d'autres latitudes, on voit clairement que la sienne ne s'accorde nullement avec les autres. Au reste, tout ce que j'avance dans cet Ouvrage à ce sujet, ne porte pas sur les Observations Astronomiques pour déterminer la figure de la Terre ; car je ferai voir qu'on a été plus heureux dans les mesures qu'on a prises, que dans la Théorie qu'on a voulu établir.

Il s'agit dans la seconde Partie de mon Traité du Mouvement, des loix du mouvement dans un milieu dont la résistance suit la loi des vitesses élevées à une puissance quelconque, & j'y donne la solution d'un Problème que Newton seul a résolu : c'est de déterminer la hauteur d'où un corps doit tomber dans un milieu résistant pour y acquérir la plus grande vitesse possible. On trouvera aussi dans cette seconde Partie trois manières de résoudre le Problème des Projectiles, qui est un des plus difficiles de la Mécanique. La méthode ordinaire des grands Mathématiciens est de le résoudre par le calcul des fluxions, & d'exprimer la fluente par une suite infinie. C'est ainsi que l'a résolu M. Euler ; mais les suites qu'il a employées pour exprimer la fluente en question, ne convergent que fort lentement, & quelquefois même point du tout. Je crois avoir évité ce défaut, en modifiant les sujets de manière qu'elles convergent dans tous les cas possibles.

Je termine ce Traité du Mouvement par la solution de quelques Problèmes touchant les oscillations du Pendule dans des cycloïdes, en supposant que la résistance est ou comme le quarré des vitesses, ou comme les vitesses simples ; & je confirme la théorie que le Chevalier Newton a donnée là-dessus dans le second Livre de ses Principes, & que quelques Auteurs avoient fort mal-à-propos cru erronée.

Approbation du Censeur Royal.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, le *Traité Analytique des Sections Coniques, & des Fluxions & Fluentes, appliquées à différens sujets.* J'ai cru que cet Ouvrage étoit très-utile à ceux qui veulent s'appliquer à la Géométrie transcendante. Fait à Paris ce 21 Janvier 1760.

MONTCARVILLE.

P R I V I L E G E D U R O I.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Confeillers, les Gens tenants nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, S A L U T. Notre bien amé CHARLES-ANVOINE JOMBERT, Imprimeur à Paris, nous ayant fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre : *Le Guide des jeunes Mathématiciens, traduit de l'Anglois, par le R. P. PEXEMAS, Jésuite. Nouveau Traité du Microscope, mis à la portée de tout le monde, traduit de l'Anglois. Traité des Fluxions & Traité d'Algebre, par Colin Maclaurin. TRAITE ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES, FLUXIONS ET FLUENTES, par M. MULLER, &c.* S'il nous plaifoit lui accorder nos Lettres de Privilège pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de douze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages ; ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression de ces Livres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, suivant la feuille imprimée & attachée pour modèle sous le contre-scel des Présentes ; que l'Imprimeur se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1715 ; & qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression d'icels Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, es mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre dit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres : le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin d'icels Ouvrages, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Confeillers & Secrétaires, soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le quatorzième jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cents quarante-neuf, & de notre Règne le trente-quatrième. Par le Roi en son Conseil. SAINSON.

Registri sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires-Imprimeurs de Paris, N^o. 160, fol. 160. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 23. Février 1725. A Paris le 16 Mai 1749. Signé, G. CAVELIER, Syndic.

TRAITÉ



TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES

ET DES

FLUXIONS ET FLUENTES

APPLIQUÉES A DIFFERENS SUJETS.

LIVRE I. DES SECTIONS CONIQUES.

SECTION I.

Des Sections Coniques considérées dans le Plan.

DEFINITIONS.

1.  Si la droite MH, parallèle au côté AD du triangle EAD, rectangle en A, rencontre les autres côtés EA, ED, prolongés en P & H; & si l'on fait $AF = AD$, la Figure décrite par un mouvement parallèle de la partie MM de cette droite, terminée par les points M, M, tels que FM soit toujours égale à la droite correspondante PH, sera nommée en générale *Section Conique*; parce que les sections d'un cone & d'un plan diversement incliné,

A



représentent de telles figures, comme on verra dans la deuxième Section.

2. Lorsque $EA > AD$, (Fig. 1.) la figure est nommée *Ellipse*; lorsque $EA < AD$, (Fig. 2.) *Hyperbole*; & si $AD = AE$, (Fig. 3.) elle est nommée *Parabole*.

N. B. Lorsque le côté AE devient infini, par rapport au côté AD , ED deviendra parallèle à EA , & l'ellipse devient alors un cercle dont le point F sera le centre.

3. Toute ligne droite qui divise en deux également toutes les droites qu'on puisse tirer dans une Section Conique parallèles entr'elles, est nommée *Diametre*.

Le diametre qui coupe ces parallèles à angles droits, est aussi nommé *Axe*.

4. Les parallèles divisées en deux également par un diametre, sont nommées *Ordonnées* à ce diametre; & leurs moitiés, *Appliquées*.

5. Deux diametres sont dit être *Conjugués*, lorsque l'un est parallèle aux ordonnées de l'autre.

6. Le point F est nommé le *Foyer*; le point de milieu de l'axe, *Centre*; & le point d'intersection d'un diametre quelconque avec la courbe, est nommé *Sommet*.

7. L'ordonnée à l'axe, qui passe par le foyer F , est nommée le *Parametre* de cet axe.

8. Toute partie d'un diametre, entre son sommet & une ordonnée quelconque, est nommée *Abscisse*: l'abscisse avec l'appliquée correspondante, sont nommées ensemble co-ordonnées.

9. Toute droite qui ne rencontre une section conique que dans un seul point, & qui, quoique prolongée, ne tombe point dans la figure, est nommée *Tangente*.

COROLLAIRE I.

1. Il suit de la deuxième définition, que l'hyperbole tombe de part & d'autre du point E . Car puisque $AD > AE$, la droite QR parallèle à AD , sera aussi plus grande que EQ ; & par conséquent QR peut être moindre, égale ou plus grande que FQ . Par conséquent lorsque $QR > FQ$, la circonférence de cercle décrite du point F comme centre avec le rayon QR , coupera QR en quelque part.

Les parties MAM , *mam*, de cette figure sont nommées *Hyperboles opposées*, l'une par rapport à l'autre.

COROLLAIRE II.

2. Il suit aussi de la cinquième définition, que AP est un axe *Fig. 1. 2. 3.* & A son sommet, puisque la droite MM est toujours divisée en deux également au point P; & qu'alors PH est = AD, FP sera aussi = FA = * AD. * *Déf. 1.*

COROLLAIRE III.

3. Si dans l'ellipse & l'hyperbole, l'on prend le point C dans *Fig. 1. 1.* l'axe, tel que $\div$ CE : CA : CF; la perpendiculaire CK sera = CA. Car en retranchant & en alternant, on aura CE — CA, CA — CF; ou EA : AF ou * AD :: CE : CA, comme CE; * *Déf. 1.* CK, à cause des parallèles AD, CK. Donc CK = CA.

COROLLAIRE IV.

4. De là si l'on prend Ca = CA dans les mêmes figures, la courbe passera par le point a. Car puisque * CE : CA :: CA : * *Art. 3.* CE, en composant & en alternant, CE : CA :: CE + CA : CA + CF ou :: Ea : Fa, comme EP : ph ou Fm. Par conséquent * *Art. 3.* lorsque E p = Ea, F m sera aussi = Fa; ce qui montre que C est le centre & a un autre sommet.

COROLLAIRE V.

5. Par conséquent, l'axe & le foyer d'une ellipse ou hyperbole étant donnés, on peut trouver autant de points de leurs courbes que l'on voudra. Car divisant l'axe par le milieu, on aura le centre C, & en faisant $\div$ CF : CA : CE, on aura le point E; & par conséquent on peut décrire la courbe par la définition première.

Et si le paramètre de l'axe de la parabole est donné, on n'a *Fig. 3.* qu'à faire le triangle rectangle isoscele EAD, en sorte que EA, AD, soient chacune égale au quart du * paramètre; on ache- * *Déf. 7.* vera le reste comme ci-dessus. Car puisque AE = AD = AF, on aura AD = $\frac{1}{2}$ Fm.

DEFINITION 10.

Si dans l'hyperbole, on prend dans la perpendiculaire CK, Cf = CF, & AB = Ab = CF; les hyperboles opposées *Fig. 1.* LBl, Nbn, décrites avec le foyer f & l'axe Bb, sont nommées
A ij

4 TRAITÉ ANALYTIQUE
Conjuguées aux hyperboles M A M, m a m, de même que celles-ci sont dites être conjugues à celles-là.

COROLLAIRE VI.

- Fig. 2. 6. De là le triangle rectangle A B C donne $\overline{BC}^2 =$
 • *Déf. 10.* $\overline{AB}^2$ ou $\ast \overline{CF}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CA} \times \overline{CF} - \overline{CA}^2$, ou
 Fig. 1. $\overline{BC}^2 = A F a$. Et dans l'ellipse, le triangle rectangle F C B
 • *Art. 3.* donne $\overline{BC}^2 = \overline{FB}^2$ ou $\ast \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 = \overline{CA} + \overline{CF} \times \overline{CA}$
 $= \overline{CF}$, ou $\overline{BC}^2 = A F a$.

THEOREME I.

- Fig. 1. 1. 7. Dans l'ellipse & l'hyperbole, le quarré d'une appliquée
 quelconque à l'axe est au rectangle fait des parties correspondantes
 de l'axe, comme le rectangle fait des parties terminées par le foyer
 est au quarré de la moitié de cet axe; sçavoir $\overline{PM}^2 : A P a ::$
 Fig. 3. $A F a : \overline{CA}^2$. Et dans la parabole, $4 A F \times A P = \overline{PM}^2$.

- *Déf. 1.* Car puisque $\ast A D$ ou $A F : A E :: P H$ ou $\ast F M : E P :: \ast$
 • *Ibid.* $C F : C A$; en retranchant, $F M - A F : A P :: C F : C A$; &
 • *Art. 3.* en composant, $I. F M + F P : A P :: F a : C A$. De même $\ast$
 • *Art. 4.* $F a : E a :: F M : E P :: C F : C A$, en composant $F a + F M :$
 $P a :: C F : C A$; d'où en composant encore, $II. F M + F P :$
 $P a :: F a : C A$; lorsque le point F est entre les points A, P.
 Par conséquent, en multipliant les proportions I & II, on aura
 $\overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$ ou $\overline{PM}^2 : A P a :: A F a : \overline{CA}^2$.

Puisque $E A = A D$ dans la parabole, on aura $E P = F M$,
 ou $I. 2 A F = F M - F P$, lorsque le point P tombe entre les
 points A, P; & $II. E P + F P$ ou $2 A P = F M + F P$. Et par
 conséquent, le produit des égalités I & II, donne $\overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$
 ou $\overline{PM}^2 = 4 A F \times A P$.

Lorsque le point P tombera en tout autre endroit de l'axe, la
 démonstration sera toujours de même, à quelques signes près.

COROLLAIRE I.

- Fig. 4. 5. 8. De là si l'on tire une autre appliquée N p à l'axe A a,
 on aura $\overline{PM}^2 : A P a :: \overline{pN}^2 : A p a :: A F a : \overline{CA}^2$. C'est-à-
 dire, dans l'ellipse & l'hyperbole, les quarrés des appliquées sont
 entr'eux comme les rectangles faits des parties correspondantes de

*l'axe. Et dans la parabole, $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: 4 AF \times AP : 4 AF$ Fig. 3.
 $\times Ap :: AP : Ap$: c'est-à-dire les quarrés des appliquées de la
 parabole sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.*

COROLLAIRE II.

9. Il est évident que dans l'ellipse & l'hyperbole, les appli-
 quées également distantes du centre sont égales. Car puisque
 $\overline{PM}^2 : APa :: \overline{pN}^2 : A p a$; si $AP = Ap$, APa sera
 $= A p a$; & par conséquent $\overline{PM}^2 = \overline{pN}^2$ ou $PM = pN$.
 D'où il suit,

1°. Que la perpendiculaire Bb est l'axe conjugué de Aa . Car
 si $CP = Cp$, PM sera aussi $= pm$; & ainsi la droite Mm sera
 parallèle à Aa , & par conséquent divisée en deux également au
 point Q par Bb . Il en sera de même à l'égard de toute autre droite
 parallèle à l'axe Aa .

2°. Que toute droite terminée dans une ellipse ou hyperboles oppo-
 sées & qui passe par le centre, est divisée en deux également par le
 centre. Car si $CP = Cp$, les triangles rectangles CPM , CpN se-
 ront semblables & égaux. Donc puisque CP , Cp , ne sont qu'une
 même droite, MC , Nc , ne feront aussi qu'une même droite.
 Il en sera de même à l'égard de toute autre droite qui passe par
 le centre.

COROLLAIRE III.

10. Puisque $CQ = PM$, & $CP = QM$, & que $\overline{PM}^2$ * Art. 7.
 $: APa$ ou $\overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 :: AFa$ ou $\overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$; on * Art. 6.
 aura $\overline{CQ}^2 : \overline{CA}^2 \mp \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$; ou en alternant
 & en composant, $\overline{BC}^2 \mp \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$. Or si
 l'on tire une autre appliquée Nq à l'axe Bb , on aura $\overline{BC}^2 \mp$
 $\overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 \mp \overline{Cq}^2 : \overline{qN}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$. Ce qui
 montre que les quarrés des appliquées à l'axe conjugué Bb , sont
 comme les quarrés de la moitié de cet axe diminués ou augmentés
 par les quarrés de leurs distances au centre.

D'où il suit, 1°. que l'un & l'autre axe partagent la figure
 en deux également, puisque chacun divise ses ordonnées en deux
 également.

2°. Les axes étant donnés, on trouvera le foyer, en faisant Fig. 1. 2.
 $BF = \frac{1}{2} AC$ dans l'ellipse, & $CF = \frac{1}{2} AB$ dans l'hyperbole : * Art. 3.
 Déf. 10.

* Art. 3. & au contraire le foyer F & le premier axe A a étant donnés, on trouvera les sommets B, b du second, en faisant $BF = Fb = *CA$ dans l'ellipse, & $AB = Aa = CF$ dans l'hyperbole.

3°. Dans l'ellipse l'axe conjugué Bb est toujours moindre que le premier. Puisque l'hypothénuse $BF (= AC)$ est toujours plus grande que l'un des côtés BC du triangle BCF . Lorsque $AC = BC$, l'ellipse devient un cercle.

Mais dans l'hyperbole, l'axe Bb peut être moindre, égal ou plus grand que l'axe Aa . Lorsque $Aa = Bb$, l'hyperbole est nommée équilatère.

N. B. Puisque la partie $CBMAMb$ de l'ellipse ou hyperbole est égale & semblable à la partie $CBmam b$, il est évident que le point f pris dans l'axe, en sorte que $Cf = CF$, sera aussi un foyer, puisqu'il aura les mêmes propriétés que le premier.

COROLLAIRE IV.

* Art. 7. 11. Lorsque l'appliquée PM tombe au foyer f ou F , la proportion $*PM^2 : APa :: AFa : \overline{AC^2}$, deviendra $\overline{Fm^2} : \overline{BC^2} :: \overline{BC^2} : \overline{AC^2}$, parce que $AFa = *BC^2$; ou $Fm : BC :: BC : AC$. Ce qui fait voir que le paramètre $*2Fm$ du premier axe d'une ellipse ou hyperbole, est une troisième proportionnelle aux premier & second axes.

* Art. 6. * Diff. 7. N. B. Tout ce que nous venons de dire touchant les hyperboles opposées MAM , mam , convient également à leurs conjuguées LBL , Nbn , avec cette différence seulement que le premier axe des unes est le second des autres.

On nommera toujours dans la suite les données $CA = a$, $CB = b$, $CF = d$, $Fm = p$, & les variables $AP = x$, $CP = u$, PM ou $*QN = y$.

* Fig. 2.

COROLLAIRE V.

* Art. 7. 12. Si l'on met les valeurs analytiques dans $*PM^2 : APa$ ou $\pm \overline{AC^2} \mp \overline{CP^2} : \overline{BC^2} : \overline{AC^2}$, on aura $yy : \pm aa \mp uu :: bb : aa$. Donc $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa - uu$ sera l'équation de l'ellipse & de l'hyperbole par rapport au premier axe Aa .

* Art. 10. Et comme on a dans les hyperboles conjuguées LBL , Nbn , *

par rapport à leur second axe Aa , (§) $\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{NQ}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$; ou $aa + uu : yy :: aa : bb$, ou $\frac{aa}{bb}yy = aa + uu$; dans la parabole, on aura $2px = yy$.

Mais si l'on met p au lieu de sa valeur $* \frac{bb}{2a}$ ($Fm = \frac{\overline{BC}^2}{AC}$) dans * Art. 11.

les équations précédentes, on aura $A. \pm \frac{a}{p}yy = aa - uu$, & $B. \frac{a}{p}yy = aa + uu$, pour les équations de l'ellipse & de l'hyperbole; la première, par rapport au premier axe; & la seconde, par rapport à l'axe conjugué Aa des hyperboles conjuguées LBl , Nbn , & par rapport à l'un ou à l'autre axe de l'ellipse, en observant que les signes de dessus appartiennent toujours à l'ellipse.

COROLLAIRE VI.

13. Puisqu'on a $\frac{aa}{bb}yy = aa - uu$ dans l'ellipse, lorsque $u = 0$ ou $= a$, y sera $= b$ ou $= 0$. Ce qui montre que l'ellipse ne passe pas au-delà des sommets des axes, & par conséquent elle rentre en elle-même.

Comme $\frac{aa}{bb}yy = uu - aa$ dans l'hyperbole, lorsque $u = a$ ou $= \infty$, y sera $= 0$ ou $= \infty$: donc les hyperboles opposées s'étendent depuis les sommets du premier axe jusqu'à l'infini.

Et parce que $2px = yy$ dans la parabole; si $x = 0$ ou $= \infty$, y sera aussi $= 0$ ou $= \infty$; & par conséquent la parabole s'étend aussi depuis le sommet jusqu'à l'infini.

N. B. Comme $2a - x = Pa = a + u$, & $AP = x = a - u$; en mettant au lieu de $2a - xx$, & au lieu de $a + u$, $a - u$, dans l'équation de l'ellipse, on aura $\frac{a}{p}yy = xx - 2a - x$; & lorsque $2a = \infty$, $2a - x$ sera $= 2a$: & par conséquent $\frac{a}{p}yy = 2ax$, ou $yy = 2px$, ce qui est l'équation de la parabole: or on pourroit déduire les propriétés de la parabole de celle de l'ellipse, par le moyen de cette supposition de $a = \infty$; mais on aime

(†) Car la proportion $\overline{BC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: BC : CA$ de l'art. 10. A l'égard de l'axe Bb , les hyperboles MA , Na , (Fig. 5.) se changent (Fig. 2.) en celle-ci, $\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$; & CQ est ici $= n$, & $QN = p$.

néanmoins mieux les démontrer séparément en faveur des commençans.

THEOREME II.

Fig. 1. a.

14. La somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole des lignes tirées des foyers en un point quelconque de la courbe, est toujours égale au premier axe; savoir $fM \pm FM = Aa$.

* Art. 9.

* Déf. 1.

* Art. 3.

Si $Cp = CP$, & que l'on tire ph parallèle à PH , à cause que $fP = Fp$, & $*pm = PM$, on aura $fM = Fm = *ph$: & comme $Cp = CP$, il s'ensuit que $(\dagger) (ph \pm PH = 2CK)$ ou $fM \pm FM = *Aa$.

Différentes constructions des Sections Coniques lorsque le premier axe & les foyers sont donnés.

POUR L'ELLIPSE.

Fig. 6.

Ayant attaché les bouts d'un fil fMF , égal en longueur au premier axe, aux foyers Ff , le style M qui sert à tenir le fil bien tendu, décrira, en tournant autour des foyers, la courbe de l'ellipse * demandée.

* Art. 14.

Fig. 7.

Si les foyers se réunissent en un point C , le style M décrira la circonférence d'un cercle.

AUTREMENT.

Fig. 2.

Soient deux règles AF, Bf , égales chacune en longueur au premier axe, attachées par un de leurs bouts aux foyers F, f , & par les autres à une troisième règle $AB (= Ff)$ de sorte qu'elles puissent tourner librement; je dis que l'intersection M fera toujours dans la courbe. Car puisque $AB = Ff$, & $AF = Bf$, les triangles fBA, AFf , seront semblables & égaux; & par conséquent les angles $f \& A$ du triangle fMA , aussi bien que les côtés fM , & MA , seront égaux. Donc $fM \pm FM = FA$.

POUR L'HYPERBOLE.

Fig. 9.

Ayant attaché le bout d'une règle Df au foyer f , & celui d'un fil FMD , dont la différence de leur longueur soit

(†) A cause des parallèles PH, CK , ph , on a $ph - CK : Cp :: CK \pm PH : CP$; ainsi puisque $Cp = CP$ par hyp. $ph = CK \pm PH$, ou $ph \pm PH = 2CK$.

égale

égale au premier axe Aa , à l'autre foyer F , & l'autre bout du fil à celui de la règle en D : le stile M , qui sert à tenir le fil bien tendu & sa partie MD comme collée contre la règle, décrira, pendant que la règle tourne autour du point f , la courbe MAm de l'hyperbole demandée.

En attachant le bout de la règle au foyer F , & celui du fil en f , on décrira la courbe NaN de l'hyperbole opposée.

Lorsque la longueur de la règle est égale à celle du fil, le stile *Fig. 10.* M décrira une droite CM perpendiculaire sur le milieu de fF .

POUR LA PARABOLE.

Ayant attaché le bout d'un fil au foyer F , & l'autre à l'extré- *Fig. 11.* mité d'un équerre fDE , dont le côté fD soit parallèle à l'axe & égal en longueur au fil; le stile M , qui sert à tenir le fil bien tendu & sa partie fM comme collée contre l'équerre, décrira, en glissant sur le côté DE , le long d'une règle fixe EE , la courbe MAm de la parabole demandée. Car si $Ba = Df$, lorsque Df tombe sur Ba , on aura $fM + MF = Aa + AB = Aa + AF$: ainsi $AF = AB$. Par conséquent $FM = AP + AF = *BP$. Donc, &c.

* *Diff. 1.**Autrement pour l'Ellipse & l'Hyperbole.*

Ayant pris fD égale au premier axe, & du foyer f comme *Fig. 12. 13.* centre avec les rayons fN, fN , pris à volonté, décrit un grand nombre d'arcs de cercles MNM ; en faisant les droites FM toujours égales à leurs correspondantes DN , les points M, M , seront dans la courbe.

Car $fM = fD \mp DN$, par const. ou $fM \pm DN = fM \pm FM = fD$ égal au premier axe.

PROBLEME I.

15. Tirer une droite qui touche une section conique dans un *Fig. 14. 15.* point donné M . *16.*

Des foyers $f, (†)F$, soient tirées les droites $fM; FM$, & dans fM , prolongée dans l'ellipse, soit prise $ML = FM$, la perpendiculaire MD sur LF sera la tangente demandée. Car si l'on tire de quelqu'autre point m de MD , des lignes aux points $L, f; fm + mL$ sera plus grand dans l'ellipse, & $fm - mL$

(†) Dans la parabole, la ligne ML est tirée parallèle à l'axe.

B

fera moindre dans l'hyperbole que fL ($= Aa$). Donc puisqu'il n'y a que le seul point D dans M D, duquel on puisse tirer deux lignes aux foyers, dont la somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole soit égale au premier axe, il s'en suit que M D sera * la tangente demandée.

* Art. 14. Si dans la parabole on prend $AB = AF$, la perpendiculaire B l sur A T passera par le point L, puisque $ML = MF$ (par constr.) & $MF = PB$. Ainsi m / parallele à M L, sera toujours moindre que mL ou son égale mF . Donc, &c.

* Par la construction de la Parabole.

COROLLAIRE I.

16. Il est manifeste que les angles fMz , FMT , faits par la tangente & par les lignes tirées du point touchant aux foyers, sont égaux. Car puisque $LM = MF$, les triangles rectangles $LD M$, FDM , ayant le côté M D de commun, seront semblables & égaux; par conséquent $LM D = FMD$, & l'angle $LM D$ est égal à son alterne $z M f$. Donc $FMD = fMz$.

COROLLAIRE II.

17. Si dans l'ellipse & l'hyperbole l'on tire les droites CD, P D; C D sera parallele à fL & $= fL = AC$, puisque $FC = Cf$, & $FD = DL$; & à cause des angles droits en D & P, on a $TF : TM :: TD : TP$. Ainsi l'angle TMF ($= fMz$) sera égal à l'angle APD , & $CDT = CPD = fMD$, & par conséquent les triangles CDP , CDT seront semblables; par conséquent $CP : CD$ ou $CA :: CA : CT$.

* Art. 15.

* Art. 16.

* Art. 16.

COROLLAIRE III.

18. De là il suit que si la perpendiculaire MK à la tangente rencontre les axes en K & k, on aura,

* Art. 17.

$$1^{\circ}. PT = \frac{+aa \mp uu}{u}, \text{ puisque } CT = * \frac{aa}{u}, \text{ \& } CP = u.$$

* Art. 18.

$$2^{\circ}. TP : PM :: PM : PK = \frac{pu}{a}, \text{ parce que } * \pm \frac{a}{p} y y = aa - uu.$$

$$3^{\circ}. CP : CA :: AP : AT; \text{ car } \pm CT \mp CA = AT = \frac{+aa \mp uu}{u}.$$

$$4^{\circ}. CP : aP :: AP : PT, \text{ parce que } PT = \frac{+aa \mp uu}{u}.$$

$$5^{\circ}. AT : aT :: AP : aP, \text{ à cause que } AT = \frac{+aa \mp uu}{u}, \text{ \& } aT = \frac{aa + uu}{u}.$$

DES SECTIONS CONIQUES.

II

6°. TA:TP::TC:Ta, ($\pm CT \mp a: \pm CT \mp u::$
 $CT:CT+a$) puisque $CT = \frac{aa}{u}$.

COROLLAIRE IV.

19. Si l'on tire l'appliquée Mp à l'axe conjugué Bb , on aura
 $PK \left(\frac{b^2}{a}\right):PM(y)::pM(u):pk = \frac{a}{p}y$, & $pk \left(\frac{a^2}{p}\right):pM$
 $(u)::pM(u):pt = \frac{b^2}{p} = * \frac{bb+yy}{p}$, & $CT = \frac{bb}{p}$; d'où * Art. 11.
 l'on voit que les propriétés des tangentes sont communes aux
 deux axes.

COROLLAIRE V.

20. Puisque dans la parabole les angles FMT , $fMt =$ Fig. 15:
 FTM sont égaux, * on aura $FM = FT = *x + \frac{1}{2}p$; & * Art. 16:
 comme $AF = \frac{1}{2}p$, il s'ensuit que $FT - AF = AT = x$; * Art. 7:
 d'où il suit,

I.

21. Que $PK = p$. Car les triangles rectangles LBf , MPK
 sont semblables & égaux, puisque tous leurs côtés sont parallè-
 les aussi bien que LM , BK . Donc $PK = BF = *p$. * Art. 71

II.

22. La tangente AD au sommet A rencontre la tangente
 MT au même point D que la droite FD . Car puisque $FM =$
 FT , FD coupe MT par le milieu; & à cause que AD , PM
 sont parallèles & $AT = AP$, AD coupera MT aussi par le
 milieu, & par conséquent au même point que FD .

III.

23. La perpendiculaire FD est moyenne proportionnelle en-
 tre FM & FA . Car à cause des triangles rectangles semblables
 FDT , FAD , on a $FA:FD::FD:FT = *FM$. * Art. 20.

THEOREME III.

24. Si dans l'ellipse & l'hyperbole l'on tire une appliquée au Planche 2.
 premier axe par l'intersection d'une droite tirée par le centre paral- Fig. 17. 12.
 lele à une tangente quelconque, le quarré de la moitié du premier
 axe moins ou plus le quarré de la distance de cette appliquée au
 centre, sera égale au quarré de la distance du centre à l'appliquée
 B ij

qui passe par le point touchant ; sçavoir $\overline{CA}^s \mp \overline{CQ}^s = \overline{CP}^s$.

- * Art. 18. n. 1. Car si $CQ = v$, $QN = z$, $PT = s$, on aura $*us = +aa \mp uu$; & à cause des parallèles, $\overline{TP}^s (ss) : CQ^s (vv) :: \overline{PM}^s : \overline{QN}^s$: : $*us (+aa \mp uu) : *aa \mp vv$, ou $ss : su :: vv : aa \mp vv$; ou en divisant le premier rapport par $\frac{1}{u}$, $us : uu :: vv : aa \mp vv$; & en composant $us : uu \pm us :: vv : aa$. Par conséquent puisque $*aa = uu \pm us$, on aura aussi $us = vv = \pm aa \mp uu$, ou $uu = aa \mp vv$.
- * Art. 18. n. 1.

COROLLAIRE I.

- * Art. 13. 25. De là il suit : 1°. puisque $*B \frac{aa}{bb} z z = aa \mp vv = *$
 * Art. 13. uu , on aura $az = bu$. 2°. Comme $A * \pm \frac{aa}{bb} yy = aa -$
 * Art. 14. uu , ou $uu = aa \mp \frac{aa}{bb} yy = *aa \mp vv$, il s'ensuit que $ay = bv$. 3°. $az \times bv = bu \times ay$, ou $zv = uy$. 4°. En ajoutant les équations $\frac{aa}{bb} z z = uu$, $\frac{aa}{bb} yy = vv$, on aura $\frac{aa}{bb} \times z z \pm yy (= uu \pm vv) = aa$, ou $z z \pm yy = bb$.
- * Art. 14.

COROLLAIRE II.

26. Si l'on tire CY perpendiculaire à la tangente MT , les triangles semblables TCr , CNQ , donneront $NC : NQ$
 * Art. 17. $(z) :: CT (\frac{aa}{u})^* : Cr$, ou $CN \times Cr = \frac{z}{u} a = ab$, parce
 * Art. 15. n. 1. que $az = *bu$.

THEOREME IV.

27. Le rectangle, fait des droites tirées des foyers perpendiculaires à une tangente quelconque, est égal au carré de la moitié de l'axe conjugué ; sçavoir $fd \times FD = \overline{BC}^s$.
 Car si la droite DC rencontre df prolongée dans l'ellipse en E , on aura (à cause que $fC = CF$, & que Ef , FD sont parallèles)
 * Art. 17. $fE = FD$, & $EC = CD = *CA$. Donc la circonférence de cercle décrite du centre C par les sommets A, a , passera par les points E, d, D ; & par conséquent par la propriété du cercle, $Ef \times fd$, ou $fd \times FD = afA = *\overline{BC}^s$.
- * Art. 6.

COROLLAIRE I.

- * Art. 14. 28. Si $fM = r$, $FM = s$, on aura $*r \pm s = 2a$. D'où il

suit, 1°. que $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$; 2°. $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$, $Cr = \frac{ab}{\sqrt{rs}}$. Car les triangles semblables $fM d$, FMD , donnent $fM : fd :: FM : FD$, & comme $f d : BC :: BC : FD$, en multipliant par ordre $fM : BC :: BC \times FM : FD$, $= \frac{bs}{r} = \frac{bbs}{rs}$, ou $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$. En mettant cette valeur de FD dans la première proportion, on aura $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$.

Or comme Cr , Ed , sont parallèles & $ED = 2CD$, on aura aussi $Ed = 2Cr = fd + FD = \frac{br + bs}{\sqrt{rs}}$, ou $Cr = \frac{ab}{\sqrt{rs}}$, parce que $r + s = 2a$.

4°. $CN^2 = fM \times FM$. Car $CN \times Cr = ab$, & $Cr = \frac{ab}{\sqrt{rs}}$.

5°. $FM \times BC = FD \times CN$, puisque $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$.

6°. $fd \times CN = BC \times fM$, à cause que $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$.

COROLLAIRE II.

29. La même chose étant supposée, excepté que FL soit parallèle à CN , la partie EM de fM , terminée par CN , sera $= CA$. Car puisque $fC = FC$, on aura $fE = EL$, mais $LM = MF$: donc $fL + 2LM = fM + FM = 2CA$, $= 2EL + 2LM$. Par conséquent $EM = CA$.

COROLLAIRE III.

30. Si du point M (le reste étant de même) on tire la perpendiculaire MK à la tangente MT , rencontrant les axes en K, k , on aura 1°. $FK = \frac{ds}{a}$, & $fK = \frac{dr}{a}$. Car $fL(2a) : fF(2d) :: ML(s)$ ou $MF : $FK = \frac{ds}{a} : fM(r) : fK = \frac{dr}{a}$.$

2°. $MK = \frac{b}{a} \sqrt{rs}$. Puisque $fL(2a) : LF(\frac{1}{2} \frac{bs}{r}) :: fM(r) : MK = \frac{brs}{a \sqrt{rs}} = \frac{b}{a} \sqrt{rs}$.

3°. $Mk = \frac{b}{p} \sqrt{rs}$. Car $KP(\frac{b^2}{a}) : PC(u) :: MK(\frac{b}{a} \sqrt{rs}) : Mk = \frac{b}{p} \sqrt{rs}$.

- 4°. $CP = u = \frac{aa + as}{d}$. Car $FK = \frac{ds}{a}$, & $CK \pm KF =$
 * Art. 11. CF , ou $u \pm \frac{as}{a} \pm \frac{ds}{a} = d$, ou à cause que * $p = \frac{bb}{a}$ & $a a \pm$
 * Art. 6. $bb = * dd$, $\frac{dd}{aa} u \pm \frac{ds}{a} = d$, ou $u = \frac{aa + as}{d}$.
 * Art. 25. 5°. $QN = z = \frac{ba + bs}{d}$, puisque * $az = bu$.
 6°. $CK = \frac{dd + ds}{a}$, parce que $CK = CP \mp PK$.
 * Art. 24. 7°. $CQ = v = \frac{a}{d} \sqrt{rs - bb}$; car * $vv = \pm aa \mp uu$, &
 * Art. 6. $bb * = \pm dd \mp aa$.
 * Art. 25. n. 8°. $PM = y = \frac{b}{d} \sqrt{rs - bb}$, à cause que * $ay = bv$.
 Fig. 21. 24. 9°. $CT = \frac{ad}{a + s}$, puisque $CT = \frac{aa}{u}$, & $u = \frac{aa + as}{d}$.
 10°. $FT = \frac{ds}{a + s}$, car $\pm CT \mp CF = FT$.
 11°. $fT = \frac{dr}{a + s}$, car $CT \mp Cf = fT$.
 12°. $KT = \frac{dr s}{aa + as}$, $FK + FT = KT$.
 13°. $TD = \frac{a \sqrt{rs} \sqrt{rs - bb}}{ar + rs}$; $CN : CQ :: FT : TD$.
 14°. $Td = \frac{a \sqrt{rs} \sqrt{rs - bb}}{as + ss}$.
 15°. $TM = \frac{\sqrt{rs} \sqrt{rs - bb}}{a + s}$.
 16°. $Dr = \frac{a \sqrt{rs - bb}}{\sqrt{rs}}$.
 17°. $MD = \frac{\sqrt{rs} \sqrt{rs - bb}}{s}$.
 18°. $Md = \frac{\sqrt{rs} \sqrt{rs - bb}}{r}$.
 19°. $CM = \sqrt{aa \pm bb \mp rs}$; car $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 \mp \overline{PM}^2$,
 * Art. 6. & * $aa \mp dd = bb$.

COROLLAIRE IV.

31. Si l'on tire des points K, k , les perpendiculaires Ka, kg , sur l'une des lignes FM ou fM que l'on voudra, on aura $Ma = p$ dans les trois sections coniques, & $Mg = a$ dans l'ellipse & l'hyperbole. Car $fM(r) : fd\left(\frac{br}{\sqrt{rs}}\right) :: MK\left(\frac{b}{a} \sqrt{rs}\right) : Ma (= \frac{bb}{a} = p) :: Mk\left(\frac{b}{r} \sqrt{rs}\right) : Mg = \frac{bb}{r} = a$,
 * Art. 11. parce que * $ap = bb$.

COROLLAIRE V.

32. Si les tangentes (le reste étant de même) tirées par les sommets A, a, du premier axe, rencontrent la tangente MT, en E, e, on aura $AE \times ae = BC^2$. Car puisque $*TA : TP :: TC : Ta$, on aura aussi $AE : PM(y) :: Ce * (\frac{bb}{y}) : ae$, ou $AE \times ae = bb$. D'où il suit, 1°. Que $AE \times ae = BC^2 = *AF \times Fa = *FD \times fd$; c'est-à-dire, $AE : AF :: Fa : ae$. Ainsi les triangles rectangles EAF, eaf, sont semblables, & par conséquent les angles EFA, efa, valent ensemble un angle droit. Donc EFe, ou Efe, sera aussi un angle droit. 2°. $ED \times De = DF^2 * = \frac{bb^2}{r}$, & $E d \times de = f d^2 = * Art. 12.$

THEOREME V.

33. Dans une section conique quelconque, le triangle PMT fait par une tangente, soutangente & appliquée correspondante, est égal au trapèze ARMP, terminé par les co-ordonnées, par une tangente qui passe par le sommet A de l'axe, & par une droite MR, qui passe par le point touchant & par le centre dans l'ellipse & l'hyperbole, & parallèle à l'axe dans la parabole; savoir $PMT = PMRA$. Fig. 25. 26.

Car puisque $*CP : CA :: CA : CT :: PM : AR$, dans l'ellipse & l'hyperbole, ou $CA \times AR = CT \times PM$, les triangles CAR, CMT seront égaux. Et par conséquent $+CAR + CPM = +CMT + CMP$, ou $PMT = PMRA$. * Art. 17.

Puisque $*TP = 2AP$ dans la parabole, le triangle TMP sera égal au rectangle PMRA. * Art. 10.

COROLLAIRE I.

34. De là il suit que tout triangle QLV, dont un de ses côtés soit une appliquée quelconque à l'axe, & qui soit semblable au triangle PMT, sera toujours égal au trapèze QKRA correspondant. Car $*PM^2 : QV^2 :: +CA^2 + CP^2 : +CA^2 + CQ^2$, (†) ou $PMT : QLV :: PMRA : QKRA$. Or com-

(†) Parce que les triangles semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues; & par conséquent la différence de deux triangles sem-

* Art. 33.

* Art. 33.

Fig. 26.

* Art. 11.

* Art. 8.

* Art. 33.

me * $PMT = PMRA$, il s'ensuit que $QLV = QKRA$ égale $QKMT$, parce que * $CMT = CAR$.

Si l'appliquée QL est tirée de quelque point de l'hyperbole conjuguée, on aura $QLV = CAR + CQK$, ou $CKLV = CAR = CTM$, parce que * $\overline{PM}^2 : \overline{QL}^2 :: \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CQ}^2 + \overline{CA}^2$.

Comme * $AP : AQ :: \overline{PM}^2 : \overline{QL}^2$ dans la parabole, on aura $PMRA : QKRA :: PMT : QLV$; mais $PMT = PMRA$: donc $QLV = QKRA = QKMT$.

COROLLAIRE II.

35. Si des espaces égaux QLV , $QKRA$, l'on retranche les espaces égaux qLV , $qkRA$, on aura $QLlq = QKkq$. D'où en retranchant la partie commune $QKElq$, il restera $LKE = lke$; & par conséquent, puisque les triangles LKE , lke , sont semblables & égaux, on aura $LE = El$. D'où l'on voit que toute ligne MC qui passe par le centre de l'ellipse ou hyperbole, ou est parallèle à l'axe dans la parabole, est un Diamètre, & les lignes parallèles à la tangente qui passe par le sommet de ce diamètre, sont Ordonnées au même diamètre.

COROLLAIRE III.

* Art. 34.

36. De là tout triangle LKE est égal au trapeze correspondant $EMTV$; car puisque * $QLV = QKMT$, en retranchant la partie commune $QKEV$, il restera $LKE = EMTV$.

Si dans l'hyperbole conjuguée l'on ajoute CVE aux espaces égaux $CKLV$, CAR ou CTM , on aura $LEK = EMTV$.

COROLLAIRE IV.

37. Puisque tout diamètre coupe ses ordonnées par le milieu

blables sera à l'un de ces triangles que l'on voudra, comme la différence des carrés de leurs côtés homologues est au carré du côté de ce triangle.

Si dans l'hyperbole (Fig. 26.) VL tombe au centre C , elle deviendra le diamètre conjugué de CM , puisqu'elle est parallèle à la tangente MT , par hypothèse, & le triangle LKE deviendra (Fig. 32.) le triangle $CND = CMT$.

Et si l'on conçoit que la ligne LK (Fig. 31.) tombe sur ND , EKL deviendra DNC , & $EMTV$ deviendra CMT .

& passe par le centre dans l'ellipse & l'hyperbole, ou est parallèle à l'axe dans la parabole, il s'ensuit que toute droite, qui passe par le centre dans le premier cas, ou est parallèle à l'axe dans le second, sera un diamètre, & la droite qu'il divise en deux également sera une de ses ordonnées.

COROLLAIRE V.

38. De là on peut trouver un diamètre qui fait un angle *Fig. 27. 24*, donné avec ses ordonnées lorsque la section est décrite. Car si dans l'ellipse & l'hyperbole on décrit sur un diamètre quelconque Mm , comme corde, un arc MLm de corde capable de contenir l'angle donné; le diamètre Aa , ou Bb , qui divise la corde ML ou Lm , tiré par les intersections de cet arc avec la courbe en deux également, sera le diamètre demandé, puisque LM sera ordonnée au diamètre Aa , & l'angle $MP C$ égale à l'angle donné MLm .

Dans la parabole le diamètre AC qui divise la droite ML , *Fig. 28*, qui fait un angle donné $L M m$ avec tout autre diamètre Mm , en deux également, sera le diamètre demandé.

THEOREME VI.

39. Dans l'ellipse & l'hyperbole, le carré d'une appliquée *Fig. 31. 32* LE à un diamètre quelconque Mm , est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diamètre, comme le carré de la moitié de son conjugué CN est au carré de la moitié de ce diamètre; savoir $\overline{LE}^2 : MEm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$. Dans la parabole $2 p \times$ *Fig. 30* $ME = \overline{LE}^2$.

Car si l'on tire ND parallèle à KL , rencontrant ME en D , on aura à cause des triangles semblables, $\overline{LE}^2 : \overline{NC}^2 :: LEK : NCD$, & MEm ou $+ \overline{CM}^2 - \overline{CE}^2 : \overline{MC}^2 :: EMTV : CMT$. Or comme $LEK = * EMTV$, & $NCD = * CMT$, ** Art. 36*, il s'ensuit que $\overline{LE}^2 : MEm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$, ** Art. 33*.

Dans la parabole $\overline{TM}^2 : \overline{LE}^2 :: PMT : KLE$, & $MR : ME :: PMRA : TMEV$; & comme $PMT = * PMRA$, ** Art. 33*, & $KLE = * TMEV$, il suit que $\overline{TM}^2 : \overline{LE}^2 :: MR : ME$. ** Art. 36*.

COROLLAIRE I.

40. Si $AP = x$, TP sera $= * 2x$, & $\overline{TM}^2 = y y + \frac{Fig. 30}{C}$ ** Art. 30*.

$4xx$, ou à cause que $2px = yy$, $\overline{TM}^2 = 2px + 4xx$.
 Ainfi $2px + 4xx : \overline{LE}^2 :: x : ME$, ou $2p + 4x \times ME = \overline{LE}^2$. Par conséquent le parametre ($2p + 4x$) d'un diamètre ME quelconque de la parabole, est quadruple de la distance de son sommet au foyer *.

* Art. 7.

COROLLAIRE II.

Fig. 31. 32.

41. Puisqu'en nommant le demi-diametre $MC(a)$, la moitié de son conjugué $NC(b)$, & les indéterminées $CE(u)$ & $LE(y)$, on aura toujours $yy : \pm aa \mp uu :: bb : aa$, ou $\pm \frac{aa}{b} yy = aa - uu$, pour l'équation de l'ellipse & de l'hyperbole par rapport à deux diametres conjugués quelconques. Or comme les articles 8, 9 & 10 sont des conséquences tirées de cette équation par rapport à l'axe, il s'ensuit que ces conséquences seront vraies à l'égard de tout diamètre.

COROLLAIRE III.

Fig. 30.

42. Si l'on tire par les extrémités L, N , des appliquées LE^2 , NF , au diamètre ME , les droites LH, NG , parallèles à l'axe, rencontrant la tangente TM en H & G , on aura $LE = HM$, $NF = GM$, $LH = EM$, $NG = FM$. Or comme $ME : MF :: \overline{LE}^2 : \overline{NF}^2$, il s'ensuit que $HL : GN :: MH^2 : MG^2$.

REMARQUES.

Fig. 33.

I. Si dans la ligne AQ qui touche la parabole en A , on prend les parties Aq, Aq , dans une progression arithmétique, les droites qm, qm , parallèles au diamètre AP , terminées par la courbe & la tangente, seront comme les quarrés dont les côtés sont en progression arithmétique : c'est pourquoi les élémens de l'espace $AmmQ$ sont en même raison que ceux d'une pyramide ; par conséquent on trouvera sa valeur de la même manière qu'on trouve celle d'une pyramide, sçavoir en multipliant la plus grande MQ par le tiers de la perpendiculaire MD . Ainfi $AmmQ = \frac{1}{3} MD \times MQ$.

II. Puisque l'espace extérieur $AmmQ$ est le tiers du parallélogramme $AQMP$, il s'ensuit que l'espace intérieur AMP en sera les deux tiers ; sçavoir $AMP = \frac{2}{3} MD \times AP$.

III. Si les abscisses Ap , $A p$ sont en progression arithmétique, les quarrés faits des appliquées, ou les surfaces coniques décrites par ces appliquées pM , pM , dans la révolution de la figure autour de l'axe AP , seront dans la même progression. Et par conséquent les élémens du solide décrit par l'espace AMP autour de AP , seront entr'eux comme ceux d'un triangle. On trouvera par conséquent la valeur de ce solide en multipliant la surface décrite par MP , ou la base par la moitié de la hauteur Md .

Si $MD = n$, $PM = y$, & que c soit la circonférence du rayon MD , on aura $\frac{1}{2}cy$ pour la valeur de la surface décrite par PM . Ainsi $\frac{1}{2}ncy$ sera la valeur du solide.

Si l'on ôte $\frac{1}{2}ncy$ de la valeur $\frac{1}{2}ncy$ du cylindre circonscrit; la différence $\frac{1}{2}ncy$ sera la valeur du solide décrit par l'espace extérieur AMQ autour de l'axe AP ; d'où l'on voit que ces solides sont égaux.

PROBLEME II.

43. Deux diametres conjugués d'une ellipse ou hyperbole étant Fig. 34. 35. donnés, décrire leurs courbes.

Ayant tiré un grand nombre de droites Mm , $m m$, parallèles à l'un des diametres Aa , & par leurs intersections P , p , avec l'autre, tiré les droites PQ , $p q$, parallèles à la droite AB , qui joint les extrémités de ces diametres; cela posé, si dans l'ellipse on décrit du centre C une demi-circonférence de cercle par les points A , a ; en faisant PM toujours égale à l'appliquée correspondante QN du cercle, la courbe demandée passera par tous les points A , m , M .

Par la propriété du cercle, $\overline{CQ}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{PM}^2 (= \overline{QN}^2)$, & à cause des triangles semblables, $\overline{CQ}^2$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{PM}^2$: $\overline{CA}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CB}^2$; ou en divisant & en alternant, $\overline{PM}^2 : \overline{CB}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$. Or comme cette proportion exprime la nature de l'ellipse par rapport aux diametres conjugués * Aa , * Art. 39. Bb , il s'ensuit que $ABab$ est une ellipse.

Si dans l'hyperbole on tire la droite DC perpendiculaire & Fig. 35. égale à AC , en faisant PM , $p m$, toujours égale à leur correspondante QD , $q D$, on trouvera tant de points M , m , que l'on voudra de la courbe demandée.

Car à cause du triangle rectangle CQD , $\overline{QD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CQ}^2$

Cij

* Art. 39.

Fig. 36.

ou $\overline{PM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CQ}^2$, & à cause des triangles semblables $\overline{CQ}^2$ ou $\overline{PM}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; & comme cette proportion exprime la nature de l'hyperbole par rapport aux * diamètres conjugués Aa, Bb , il s'ensuit, &c.

Soit AB le paramètre du diamètre AP de la parabole: si des centres C, C pris à volonté dans AB , l'on décrit des demi-circonferences de cercle par le point B , qui rencontrant la droite AN parallèle aux ordonnées MM de ce diamètre en N, n ; en faisant PM toujours égale à sa correspondante AN , les points M, m , seront dans la courbe demandée, puisque $AB \times AP = \overline{AN}^2 = \overline{PM}^2$.

THEOREME VII.

Fig. 37. 38.

44. Le parallelogramme HG fait de deux diametres conjugués Mm, Nn quelconques d'une ellipse ou hyperbole, est égal au rectangle fait de deux axes Aa, Bb .

* Art. 35.

R. Art. 26.

En tirant Cr perpendiculaire sur un des côtés HM , on aura; à cause que HM est une tangente * & parallèle à Nn , * $CN \times Cr = \overline{CA} \times \overline{CB}$, ou $MN \times mn = Aa \times Bb$.

THEOREME VIII.

45. La somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole des quarrés des demi-diametres conjugués quelconques CM, CN , est égale à la somme ou différence des demi-axes CA, CB .

* Art. 24.

* Art. 25. n.

* Art. 28. n.

4.

Des sommets M, N , soient tirées les appliquées MP, QN , au premier axe Aa , on aura $\overline{CM}^2 = uu + yy$, & $\overline{CN}^2 = zz + vv = * \overline{aa} + \overline{uu}$. Donc $\overline{CN}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{zz} + \overline{yy} = \overline{bb} + \overline{aa}$. On a la même chose par art. 30. n°. 12. car $CM = \sqrt{aa + bb + rs}$, & $CN = * \sqrt{rs}$.

THEOREME IX.

Fig. 39. 40.

46. Le rectangle fait des parties d'une droite Ll terminées dans une ellipse ou hyperbole, & par un diamètre quelconque Mm , est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diamètre comme le quarré du demi-diamètre NC , parallèle à cette droite, est au quarré de la moitié de ce premier diamètre; savoir $LKl : MKm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$.

Si des points K, N , l'on tire KF, NS parallèles à la tan-

genre MT , rencontrant le diamètre Aa , dont L est l'ordonnée, en F , S , & le reste étant comme dans les fig. 31. 32. on aura $KLE = * EMTV$, ou $FKMT = FKL V$. Or comme $Q L^2 - Q K^2 : \overline{NC}^2 :: FKLV : NCS$, lorsque le point K tombe dans la figure, & $\pm CM^2 \pm \overline{CK}^2$ ou $M Km : \overline{MC}^2 :: FKMT : CMT$. Donc puisque $FKMT = FKL V$, & $CMT = * NCS$, il s'en suit que $LKl : MKm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$. * Art. 34

Lorsque le point K tombe hors de la figure, la démonstration est à quelques signes près de même.

Si dans la parabole on tire l'appliquée MP au diamètre AP , Fig. 41.
dont le paramètre est $= 2p$, on aura $* 2p \times AP = \overline{PM}^2$, & * Art. 39.
 $2p \times AQ = \overline{LQ}^2$; ainsi $2p \times \pm AP \pm AQ = \pm \overline{PM}^2 \pm \overline{LQ}^2$, ou à cause que $QK = PM$, on aura $2p \times MK = LKl$.

COROLLAIRE I.

47. De là si la droite Hh , parallèle au demi-diamètre RC Fig. 39. 40.
& terminée dans la section, coupe le diamètre Mm au même point K que la droite Ll , on aura $HKh : MKm :: \overline{RC}^2 : \overline{MC}^2$. Et comme $LKl : MKm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$, il s'en suit que $LKl : HKh :: \overline{NC}^2 : \overline{RC}^2$. Si $2q$ est le paramètre du diamètre dont Hh est l'ordonnée, on aura $2q \times MK = HKh$; & Fig. 42.
comme $2p \times MK = LKl$, il s'en suit que $LKl : HKh :: 2p \times MK : 2q \times MK :: p : q$.

COROLLAIRE II.

48. Si dans une section conique quelconque, deux droites Hh , Gg , parallèles entr'elles & terminées dans la section, rencontrent une autre droite Ll en K & P , en dedans ou en dehors de la section, on aura $* LKl : HKh :: \overline{NC}^2 : \overline{RC}^2$, * Art. 47.
ou $:: p : q$, & $LP l : GP g :: \overline{NC}^2 : \overline{RC}^2$, ou $:: p : q$; par conséquent $LKl : HKh :: LP l : GP g$.

COROLLAIRE III.

49. Si dans une section conique quelconque la droite TD (le reste étant de même) parallèle aux droites Hh , Gg , touche la section en D , & rencontre la droite Ll prolongée en T ;

Art. 48.

en concevant que la droite Hh devient la tangente DT , la proportion $*LKl : HKh :: LP l : GPg$, deviendra $LTl : \overline{DT}^2 :: LP l : GPg$.

COROLLAIRE IV.

50. De là il suit, 1°. que si la droite RO , touche la section en A & rencontre la tangente DT en O , on aura $LKl : HKh :: \overline{BO}^2 : \overline{DO}^2$.

2°. Si la droite AR , parallèle à DO touche la section en A & rencontre la tangente RO en R & Ll en S , on aura $LSl : \overline{AS}^2 :: \overline{BR}^2 : \overline{AR}^2$, & $\overline{AR}^2 : \overline{BR}^2 :: \overline{DO}^2 : \overline{BO}^2$, ou $AR : BR :: DO : BO$.

3°. Si les droites Gg , Hh prolongées, rencontrent la tangente RO en F & M , on aura $GFG : HMh :: \overline{BF}^2 : \overline{BM}^2$, d'où l'on voit en général que de quelque manière que deux droites parallèles entr'elles puissent rencontrer une troisième droite en dedans ou en dehors de la section, & que ces droites touchent ou coupent la section, les rectangles faits des parties de ces parallèles terminées par la section & l'autre droite, seront toujours entr'eux comme les rectangles faits des parties correspondantes de cette droite terminées dans la section & par ces parallèles.

THEOREME X.

Fig. 43. 44.

51. Les droites nK , mH , qui passent les extrémités de deux ordonnées à un diamètre Aa quelconque d'une section conique aussi quelconque, rencontrent ce diamètre au même point T .

Def. 4.

Car soient p & Q les intersections de ces ordonnées avec leur diamètre, on aura à cause des parallèles, $Qm - pH : Qp :: pH : pT$, & $Qn - pK : Qp :: pK : pT$. Or comme $Qm = *Qn$ & $pH = pK$, il s'ensuit que $Qm - pH = Qn - pK$; & par conséquent puisque les trois premiers termes de ces proportions sont égaux chacun à chacun, les quatrièmes le seront aussi.

COROLLAIRE I.

52. De là il suit que si la ligne Tm devient la tangente TM d'un côté, la ligne Tn deviendra aussi la tangente TM de l'autre; & par conséquent les ordonnées HK , mn tomberont sur la droite MM , qui joint les points touchans.

58. De là il suit que si l'on tire une droite quelconque Vm par le point P , ses parties VK , Vm , terminées par la droite TV & la courbe, seront toujours entr'elles comme ses parties KP , Pm , terminées par la courbe & le point P . Car si l'on suppose que les droites Vm , Tm tournent autour des points P & T , il est évident que pendant que l'intersection m parcourt l'arc MAM , ou nAm , l'intersection V parcourra la droite TV .

COROLLAIRE VIII.

Fig. 45:

59. Si dans une section conique quelconque on tire d'un point D tel que l'on voudra de la droite TV (le reste étant de même) deux tangentes Dm , DK , la droite Km , qui joint les points touchans, passera toujours par le point P . Car concevant une droite tirée par les points D & P , il est évident que ses parties terminées par la courbe & le point D seront entr'elles * comme celles qui sont terminées par la courbe & le point P ; par conséquent mK passe * par le point P .

* Art. 58.

* Art. 53:

COROLLAIRE IX.

60. La droite Hd qui touche la section en H , rencontre la droite PM prolongée au même point t que la tangente mD . Car à cause des parallèles tM , HK , TD , on a $TD = Td$, puisque $pH = pK$, & $TH : Hr :: Td : rt$; de même $Tm : rm :: TD : rt$. Or comme * $TH : Hr :: Tm : rm$, & que $TD = Td$, il s'ensuit que les quatrièmes termes seront aussi égaux; d'où l'on tire le théorème suivant.

* Art. 53.

THEOREME XI.

61. Si dans une section conique quelconque on prend deux points P , T dans un diamètre Aa prolongé, tels que $\frac{CP}{CA} = \frac{CT}{CA}$, dans l'ellipse & l'hyperbole, & $AT = AP$ dans la parabole, & que l'on tire les droites Pt , TV , parallèles aux ordonnées de ce diamètre Aa ; toute droite, qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point de la droite DV , passera toujours par le point P ; & toute droite, qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point de la droite Pt , passera toujours par le point T .

THEOREME

THEOREME XII.

62. Les tangentes tirées de deux points T, t , du même diamètre d'une ellipse ou hyperbole également distans du centre C , forment un parallélogramme. Fig. 46. 47.

Ayant tiré des ordonnées Mm, Nn par les points touchans, on aura $\mp CP : CA : CT$, & $\mp CQ : Ca : Ct$; ainsi puisque $CA = Ca$, & $CT = Ct$, par hypothese, les droites CP, CQ , & par conséquent les appliquées Pm, QN , aussi bien que les soutangentes PT, Qt , seront égales. Donc les triangles TPm, tQN , seront semblables & égaux, & par conséquent les angles $mTP, n tQ$ seront égaux. On prouvera de la même maniere que les angles $MTP, n tQ$ sont égaux.

COROLLAIRE I.

63. Les parties DM, dn , des côtés du parallélogramme, entre les points touchans & les angles opposés, seront égales; car $T D$ étant parallele & égale à $t d$, & $TM = tn$, il s'ensuit que $DM = dn$.

COROLLAIRE II.

64. Les diagonales Tt, Dd , seront deux diametres conjugués; car puisque MP, QN sont paralleles & égales, la droite MN sera parallele à QP , & ainsi les triangles tDT, NDM seront semblables, & par conséquent puisque Dd divise Tt par le milieu, elle divisera aussi MN par le milieu. Donc, &c.

THEOREME XIII.

65. Dans une section conique quelconque, les quarrés des parties LS, SN , d'une droite, terminées par deux tangentes TA, TC , & par la droite AC , qui joint les points touchans, sont entre eux comme les rectangles faits des parties de cette droite terminées par la courbe & les tangentes; savoir $LS^2 : SN^2 :: HLR : RNH$. Fig. 48. 49.
50.

Ayant tiré du point L la droite LF parallele à une de ces tangentes TC , coupant la courbe en E, F , & AC en K , on aura $* EL F : LA^2 :: TC^2 : TA^2$; & à cause des paralleles LK, TC , on a $LK^2 : LA^2 :: TC^2 : TA^2$. Ainsi $LK^2 = EL F$, & par conséquent $EL F$ ou $LK^2 : CN^2 :: LS^2 : SN^2$ *, comme * Art. 50. m.
2.
* Art. 50. n.
3.

Fig. 49.

N. B. Lorsque L R est un diamètre de la parabole, elle ne rencontre la courbe qu'en un seul point H; & ainsi N R, L R seront infinies & égales dans ce cas; par conséquent $\overline{LS}^2 : \overline{SN}^2 :: HL \times NR : HN \times NR :: HL : HN$.

COROLLAIRE I.

Fig. 50.

66. Si la droite L S, au lieu de couper la section ne fait que la toucher au point B, c'est-à-dire si L S devient la tangente I S; L H, L R deviendront $= I B$, & N R, N H $= n B$; de même S H, S R $= S B$. Et par conséquent la proportion ci-dessus deviendra ici $\overline{SL}^2 : \overline{SN}^2 :: B I^2 : B n^2$, ou $S I : S n :: B I : B n$.

COROLLAIRE II.

Fig. 51. 52.

67. Les diagonales M G, L N d'un trapeze M N G L, dont les côtés touchent une sect on conique quelconque, se coupent au même point S que les droites A C, B D, qui joignent les points touchans opposés. Car si la diagonale L N rencontre la courbe en H, R, on aura R N H : H L R :: $\overline{SN}^2 : \overline{SL}^2$, par rapport à la droite A C ou D B. On prouvera la même chose à l'égard de la diagonale G M.

COROLLAIRE III.

* Art. 65.

68. Si les droites B C, A D, qui joignent les points touchans du même côté de la diagonale N L sont prolongées, elles rencontreront encore la diagonale N L, prolongée s'il faut, au même point E. Car $\overline{EN}^2 : \overline{EL}^2 :: R N H : H L R$, par rapport à la ligne B C ou A D. Et comme R N H : H L R :: $\overline{SN}^2 : \overline{SL}^2 :: \overline{EN}^2 : \overline{EL}^2$, il s'ensuit que S N : S L :: E N : E L.

Fig. 52.

N. B. La diagonale T K du trapeze N T L K, qui ne rencontre pas la courbe, coupe néanmoins l'autre diagonale N L au même point E que les lignes B C, A D; car nous venons de prouver qu'elle a les mêmes propriétés que la diagonale G M, ou L N.

THEOREME XIV.

Fig. 53.

69. Si deux droites quelconques N M, L E, sont parallèles entr'elles & terminées dans la parabole, les rectangles faits de leurs parties terminées par deux diamètres b D, m F, seront entr'eux comme

les parties de ces diametres entre leurs sommets & ces paralleles ;
 sçavoir $MFN : EDL :: mF : bD$.

Soit $2p$ le parametre du diametre AP auquel MN , EL sont ordonnées, on aura $* 2p \times mF = MFN$, & $2p \times bD = E D L$. Par conséquent $MFN : EDL :: 2p \times mF : 2p \times bD :: mF : bD$. * Art. 45. m.

COROLLAIRE I.

70. Si la ligne AH parallele à NM , touche la parabole en A & rencontre les diametres bD , mF prolongés en R & Q , en concevant que la ligne LE tombe sur cette tangente, on aura $mF : bR :: MFN : AR$.

COROLLAIRE II.

71. Si le diametre bD coupe la droite NM en K , en concevant que la ligne LE tombe sur MN , on aura $NKM : NFM :: bK : mF$, & $NKM : LDE :: bK : bD$.

COROLLAIRE III.

72. De là on tire une maniere de décrire une parabole par trois points donnés N , m , M , lorsque la position des diametres est donnée. Car si l'on tire par le point m & par le point de milieu P de la ligne qui joint les deux autres points donnés, les diametres mF , AP , & si l'on fait $MFN : PM^2 :: mF : AP$, on aura le sommet A du diametre AP . En faisant $AP : PM : 2p$, on aura le parametre $2p$. Par conséquent on peut décrire la parabole par l'art. 43. n°. 2.

COROLLAIRE IV.

73. Si deux lignes DR , MN terminées dans la parabole, Fig. 141
 se coupent en L , & sont paralleles aux tangentes EB , AB , en E & A , & qu'après avoir tiré le diametre AP par le point touchant A , lequel rencontre BE en T , l'on tire du point N la ligne Nb parallele à AP , rencontrant RD prolongée en b , on aura $* EB^2$ ou $TB^2 : AB^2 :: RLD : MLN :: LB^2 : LN^2$, ou $RLD : ML : LB^2 : LN$. Et si NQ parallele à RM , rencontre DR en Q , on aura $ML : RL :: LN : LQ$; ex æquo, $LD : 1 :: LB^2 : LQ$, ou $LB^2 = LD \times LQ$. * Art. 22.
* Art. 50.

D ij

COROLLAIRE V.

74. De là il suit qu'on peut décrire une parabole par quatre points donnés R, M, D, N: car supposant la construction précédente, si l'on fait Lb moyen proportionnel entre LD & LQ , on aura la position bN des diamètres, & par conséquent on achèvera le reste comme dans l'art. 72.

N. B. Lorsque le point b peut être pris de deux côtés du point L , on peut décrire deux paraboles par les quatre points donnés; mais lorsque le point b tombe sur le point R ou D , la construction est impossible, parce que le même diamètre ne peut couper la parabole que dans un seul point.

DEFINITIONS.

Fig. 55.

14. Les droites TL , RV , qui passent par le centre C d'une hyperbole, & qui sont parallèles aux lignes BA , bA , qui joignent les sommets des axes Aa , Bb , sont nommées *asymptotes*.

15. Le carré de la partie CD ou CH de l'asymptote, terminée par le centre & par la ligne qui joint les sommets des axes, est nommé la *puissance* de l'hyperbole.

COROLLAIRE I.

75. De là il suit que la tangente EF tirée par le sommet d'un axe & terminée par les asymptotes, est égale à l'axe auquel elle est parallèle. Car à cause des parallèles BA , CH , on a $BC = AE$; & à cause des parallèles Ab , DC , AF sera $= bC$. Donc $EF = Bb$.

COROLLAIRE II.

76. Le quadruple de la puissance $\overline{CD}^2$ de l'hyperbole est égal à la somme des carrés des deux demi-axes. Car à cause des parallèles BA , CH , on a $CD = HA = \frac{1}{2} bA$, ou $2CD = bA = AB$. Donc à cause du triangle rectangle ACB , $\overline{AB}^2$ ou $4\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$.

THEOREME XV.

Fig. 55.

77. Si l'on tire une droite MT parallèle à l'un des axes, je dis que le rectangle fait ses parties terminées par les asymptotes &

par un point de la courbe, sera égal au carré de la moitié de l'axe auquel elle est parallèle, sçavoir $TM R = \overline{BC}^2$.

Car à cause des parallèles $E F, T M$, on a $CA (a) : AE$ ou $BC (b) :: CP (u) : PT = \frac{b^u}{a}$. Ainsi $TM = PT + PM = \frac{b^u}{a} + y$, & $MR = \pm PT \mp PM = \pm \frac{b^u}{a} \mp y$. Par conséquent $TM R = \pm \frac{b^b}{aa} u u \mp y y = * b b$.

* Art. 36

COROLLAIRE I.

78. De là il suit que si l'on tire deux droites rt, ad , parallèles entr'elles, les rectangles rMt, aNd , faits de leurs parties terminées par les asymptotes & les courbes, seront égaux. Car si les lignes NV, MT , parallèles à l'axe Bb , rencontrent les asymptotes en L, V , & R, T , on aura $MR : Mr :: NV : Nd$, & $MT : Mt :: NL : Na$. En multipliant par ordre, $RM T : rMt :: LNV : aNd$. Or comme $* RMT = LNV$, on aura aussi $rMt = aNd$.

* Art. 77.

COROLLAIRE II.

79. Si de deux points quelconques M, N , pris dans les courbes des hyperboles, on tire les lignes Ma, Nr parallèles entr'elles, aussi bien que les droites Md, Nt , lesquelles rencontrant les asymptotes en a, r, d, t , le rectangle aMd fait des lignes tirées du même point de la courbe, sera égal au rectangle fait de celles tirées de l'autre. Car soient R, T, V, L , les points où les deux lignes tirées par les points M, N , parallèles entr'elles, rencontrent les asymptotes, on aura $MR : Ma :: NL : Nr$, & $TM : Md :: NV : Nt$; en multipliant par ordre, $RM T : aMd :: LNV : rNt$. Or comme $* RMT = LNV$, il s'ensuit que $aMd = rNt$.

Fig. 56.

* Art. 77.

COROLLAIRE III.

80. Si les lignes Ma, Nr sont parallèles à l'asymptote TV , & Md, Nt à l'asymptote RL , on aura $Ca = dM$ & $Cr = nN$, & par conséquent $CaM = CrN$. Si la ligne Kg , qui joint les sommets des axes, coupe l'asymptote RL en I , & si $CI = IK = n$, $Ca = x$, $aM = y$, en concevant que la ligne rN tombe sur la ligne IK , on aura $n n = x y$ pour l'équation de l'hyperbole par rapport aux asymptotes.

hyperbole étant donnés, on trouvera les axes Kk , Gg , si après avoir tiré l'asymptote CE par le milieu H de $A b$, & pris CI moyenne proportionnelle entre CH & HA , on tire gIK * Art. 294, parallele à HA , & que l'on fasse $IK = Ig = IC$; les lignes tirées par le centre & les points g & K , seront les axes cherchés.

COROLLAIRE IX.

86. Puisque les côtés adjacens aux angles égaux H , I , sont réciproquement proportionnels *, il s'ensuit, 1°. que les triangles CAH , CKI , sont égaux; & par conséquent le parallelogramme dont les côtés touchent les hyperboles & qui sont paralleles à deux diametres conjugués, est $= 4 CEF = 4 b CA$. 2°. La différence des quarrés de deux diametres conjugués CA , Cb , proportionnelle à $4 CH \times HA$, sera aussi donnée, ce qui a déjà été prouvé ci-devant.

REMARQUE.

Si les lignes PM sont des appliquées au diamètre CA conjugué à BC , la ligne AE tangente en A , CN une asymptote, & Bb parallele à CA , & coupant les appliquées en b , b ; cela posé, puisque $\pm \overline{PN}^2 \mp \overline{PM}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2$, ou $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 \mp \overline{BC}^2$, il est évident que le quarré de PM , ou la surface décrite par PM dans la révolution de la figure autour de l'axe CP , sera égal au quarré $\overline{PN}^2$, ou à la surface décrite par PN , diminuée ou augmentée par le quarré $\overline{BC}^2$, ou par la surface décrite par BC dans cette révolution; & comme cela arrive toujours, le solide, décrit par l'espace AMP dans cette révolution, sera égal à la différence entre le cone tronqué décrit par l'espace $AENP$, & le cylindre décrit par le parallelogramme $AEBP$.

Et le solide décrit par l'espace $CBMP$, sera égal au cone décrit par le triangle CPN , plus au cylindre décrit par le parallelogramme $CBbP$.

THEOREME XVI.

87. Si dans l'hyperbole on tire une droite BD parallele à une des asymptotes CT , laquelle rencontrant tant la tangente au point A , en F , que la courbe en B & l'ordonnée MN au diamètre Aa en P ; le rectangle fait de BP & d'une constante, sera au res-tan-

gle NPM, fait des parties de cette ordonnée, dans un rapport donné, sçavoir $2BP \times PQ : NPM :: CE : AE$.

Fig. 58.

Soient E, T, Q, les points de rencontre de l'asymptote avec la tangente FA, & les ordonnées BB, NM; & K, L les intersections de ces ordonnées avec leur diamètre Aa. Cela posé, si $CE = a$, $AE = b$, $BD = c$, $PD = x$, $PM = y$, $BT = PQ = r$; les triangles semblables CAE, DLP, DKB, donneront $PL = \frac{bx}{a}$, $BK = \frac{bx}{a}$; ainsi $QL = r \mp \frac{bx}{a}$, $ML = y \mp \frac{bx}{a}$, $TK = r \mp \frac{bx}{a}$. Ces valeurs étant substituées dans

Art. 73.

$*(TBB = QMN) \overline{TK}^2 - \overline{KB}^2 = \overline{QL}^2 - \overline{ML}^2$, donneront $\mp \frac{1}{a} \frac{bx}{a} = \mp \frac{1}{a} \frac{bx}{a} \pm \frac{1}{a} \frac{bx}{a} - yy$, après la réduction; ou $yy \mp \frac{1}{a} \frac{bx}{a} = \frac{1}{a} \frac{bx}{a} \times \pm C \mp x$. Par conséquent $2BP \times PQ (\pm 2rc \mp 2rx) : NPM (yy \mp \frac{1}{a} \frac{bx}{a}) :: CE (a) : AE (b)$. En changeant tous les signes, la proportion servira pour la figure 59.

COROLLAIRE.

88. De là il suit que si la droite mn parallèle à MN , coupe la courbe en m , n , la ligne BP en p , & l'asymptote en q , on aura $2BP \times PQ : MPN :: 2Bp \times pq : mpn :: a : b$. Et en concevant que la ligne mn tombe sur la tangente AF, on aura $2BP \times PQ : MPN :: 2BF \times FE : AF^2$. Car Bp devient dans ce cas $= BF$, & $pm = pn = AF$.

THEOREME XVII.

Fig. 60. 61.

89. Si une droite LL terminée dans une ellipse ou hyperbole; coupe deux diamètres conjugués Mm, Nn quelconques, en dedans ou en dehors de la section, le rectangle fait de ses parties, terminées par ces diamètres & par celui auquel elle est ordonnée, plus ou moins le carré de la moitié de cette ligne, sera égal au carré du demi-diamètre BC parallèle à cette ligne, sçavoir $aRd \pm \overline{RL}^2 = \overline{BC}^2$.

Si par les sommets M, N des diamètres Mm, Nn, on tire les appliquées MP, NQ au diamètre Aa; & si $CQ = v$, $QN = z$, $CP = u$, $PM = y$, les parallèles LL, NQ, PM, donneront $aR = \frac{2}{u} CR$, $dR = \frac{z}{v} CR$. Ainsi aRd

=

$LB : OE$. Or $LD = LB$ par constr. Donc $OG = OE = OC$, par conséquent le cercle décrit du centre O par le point G , passera aussi par les points C , E ; & comme l'angle $OE A$ est égal à l'angle $LB A = o e f$ par constr. le segment $E C F$ sera capable de contenir l'angle donné.

N. B. I. Si la ligne LB peut être portée du point L à deux points différens de $H G$, le problème aura deux solutions; & si on ne peut la porter à aucun, le problème sera impossible.

II. Si l'angle donné est droit, le centre O tombera au point H . Car $E F$ sera alors un diamètre aussi bien que la ligne $L H$ prolongée; & par conséquent leur intersection H sera le centre.

III. Si $C G$ coupe $E F$ à angles droits, $L O$ sera alors parallèle à $E F$, & $LO = BE$, $LB = OE$; c'est pourquoi les arcs de cercle décrits des centres C , G , avec le rayon BL , se couperont au centre O .

IV. Si le point L tombe au point A , & ainsi la ligne $G H$ sur $G A$, on tirera d'un point quelconque de la ligne $H O$, excepté le point A , la ligne LB de la même manière que ci-dessus, laquelle étant portée du point L en quelque point sur CG , le reste s'achèvera comme ci-dessus.

V. Si les points C & G tombent l'un sur l'autre, en sorte que $C G$ devienne tangente en L , alors $H G$ deviendra $= HL$, $OL = OG$, $HD = HL + LD = * LB$. C'est pourquoi la porportion $HD : HG :: LD : OG$ se changera ici en $LH + LB : HL :: LB : LO$.

VI. L'angle $o e f$ est égal à la différence entre l'angle donné $e c f$ & un angle droit. Car la moitié de l'arc $f n e$ sera la mesure de l'angle donné, & la moitié de $f r$, terminée par $e o$ prolongée, la mesure de l'angle $o e f$; par conséquent la moitié $r n e$ de la circonférence sera la mesure de leur différence.

COROLLAIRE I.

91. De là on peut trouver deux points E , F dans une droite donnée de position, tels qu'en tirant des droites de ces points à deux autre R , C donnés, l'angle $F C E$ soit égal à un angle donné, & $F R E$ un angle droit. Car si l'on tire par les points C & A , où la perpendiculaire RA sur $E F$ rencontre cette ligne, une droite $C A G$, & que l'on prenne le point G , tel que $CA : AR : A G$, la circonférence de cercle décrite par les points C , G , telle que le segment terminé par la droite $E F$ soit capa-

Fig. 64.

* Art. 90.

Fig. 65.

Fig. 63.

ble de contenir l'angle donné, coupera la droite EF aux points demandés. Car par la propriété du cercle $EAF = CAG$ égal à $\widehat{AR}^2$, par constr. par conséquent puisque $\div E A : A R : A F$, l'angle ERF sera droit.

COROLLAIRE II.

92. Deux diamètres conjugués quelconques d'une ellipse ou hyperbole étant donnés, on en peut trouver deux autres tels que l'angle qu'ils font entr'eux soit donné. Car si dans l'un de ces diamètres Aa prolongé dans l'ellipse, on prend le point G tel que $\div AC : BC : AG$, & que l'on tire par le sommet A la ligne EF parallèle à l'autre Bb ; & si après avoir décrit une circonférence de cercle par les points C, G , en sorte que le segment ECF puisse contenir l'angle donné, les diamètres Nn, Mm , qui passent par les intersections E, F de la circonférence & de la droite EF , seront les diamètres demandés. Fig. 66. 67.

Car par la propriété du cercle $CAG = EAF$ est égal à $\widehat{BC}^2$ par construction; par conséquent Mm, Nn , seront deux diamètres conjugués *, & NCM sera égal à l'angle donné.

* Art. 89. n.

Si l'on tire l'appliquée AP au diamètre Mm , & que l'on prenne CM, Cm chacune égale à la moyenne proportionnelle entre CP & CF , les points M, m seront les sommets * de ce diamètre. On trouvera de la même manière les sommets N, n du diamètre Nn . * Art. 54

COROLLAIRE III.

93. Outre la construction générale & celle de l'art. 90. n°. 2. on peut encore trouver les deux axes de la manière qui suit. Par le sommet A de l'un des diamètres donnés, soit tirée la ligne Ak perpendiculaire à son conjugué Bb ; & sur le milieu de CG , la différence dans l'ellipse ou la somme dans l'hyperbole de AC & de son paramètre, soit tirée une perpendiculaire sur CG ; & de son intersection O avec Ak , comme centre, soit décrite une circonférence de cercle par le centre C de la section; les diamètres Mm, Nn , qui passent par les intersections Kk de la circonférence & de Ak , seront les axes demandés. Car la propriété du cercle donne $CAG = kAK$, & les triangles rectangles semblables KAF, kAE donnent $AK : AF :: AE : Ak$, ou $kAK = EAF$ égal à $\widehat{BC}^2$ par constr. Par conséquent Mm, Nn , seront deux diamètres * conjugués, & KCk un angle droit. * Art. 19. n.

E ij

Fig. 70.

94. Si dans la parabole on tire la droite EF par le sommet A , parallèle aux ordonnées du diamètre AP , & si la partie AO de ce diamètre, prolongé vers le haut, est égale à la moitié de son paramètre, & que l'on décrive du centre O un arc de cercle tel que les angles QEF , OFE , soient chacun égal à l'angle donné; le diamètre qui passe par l'intersection E ou F , sera celui qui fera l'angle donné avec ses ordonnées. Car si des sommets A, M , on tire les appliquées AQ, MP , aux diamètres MQ, AP , on aura $*MQ = MF = AP = x$, $AF = PM = y$;

* Art. 54.

* Art. 39. n.

24

& comme $*2px = yy$, on aura $FQ(2x) : AF(y) :: AF(y) : AO(p)$; par conséquent puisque les côtés adjacens aux angles égaux QFA, OAF sont proportionnels, les triangles QFA, FAO seront semblables, & l'angle FQA sera égal à l'angle DFO .

Si l'arc de cercle touche seulement la ligne EF au point D , les diamètres EL, FM tomberont sur l'axe Dp . Car en tirant Ap perpendiculaire sur Dp , les triangles rectangles semblables ADO, ApD , donneront $pD(2x) : AD(y) :: AD(y) : AO(p)$, ou $2px = yy$.

N. B. On pourroit encore donner ici plusieurs problèmes curieux touchant les diamètres conjugués; comme, par exemple, deux diamètres conjugués étant donnés, trouver la position d'un autre aussi donné de grandeur, avec la position & la grandeur de son conjugué, ou en trouver deux autres dont la somme, la différence, le rapport, ou le rectangle faits de ces diamètres, soit donnée; mais comme cela nous meneroit trop loin, nous n'ajouterons que le premier, auquel les autres se peuvent réduire fort aisément.

Fig. 63. 69.

Supposons que les deux diamètres conjugués Mm, Nn soient donnés, & qu'il faille trouver la position du diamètre Aa donné de grandeur, aussi bien que la position & la grandeur de son conjugué Bb . Si l'on nomme CM, m , & n la perpendiculaire tirée du sommet M au diamètre Nn , CA, r , & z la perpendiculaire tirée du sommet A au diamètre Bb : cela posé, on aura $*nm = rz$; ainsi connoissant z , il est clair que l'on connoitra aussi l'angle ACb , que ces diamètres doivent faire entr'eux, puisque dans le triangle rectangle on a l'hypothénuse $CA(r)$ ou le sinus total & le sinus z de l'angle ACb . Par

* Art. 44.

conséquent on peut trouver la position des diamètres Aa , Bb aussi bien que la grandeur de Bb , par l'art. 92.

THEOREME XVIII.

95. Si d'un point quelconque E de la courbe d'une section conique, *Fig. 71. 72.*
 on tire des lignes sur les côtés d'un trapeze $ABCD$ inscrit dans la sec-
 tion, parallèles à des lignes données de position, le rectangle QER
 fait de celles qui tombent sur les côtés opposés, sera au rectangle
 SET , fait de celles qui tombent sur les autres côtés opposés, dans
 un rapport constant.

Premier cas. Soient les côtés AB , DC & les droites ER , *Fig. 71.*
 EQ parallèles entr'elles, de même que les droites ES , ET , & le
 côté BC . Si l'on prolonge EQ jusqu'à la rencontre de la courbe
 en K , on aura $KQ = ER$, puisque le diamètre LV , auquel
 AB , DC sont ordonnées, divise EK , aussi bien que RQ , par
 le milieu. Par conséquent EQK ou son égal REQ , sera à
 BQC ou son égal SET , dans le rapport constant * des carrés
 faits des tangentes parallèles à ces lignes. ** Art. 50. n^o 1.*

Deuxième cas. Soient le côté AB & les droites ER , EQ *Fig. 72.*
 parallèles, de même que le côté BC & les lignes ES , ET . Si
 les lignes Ct , Dn , parallèles à AB , coupent la courbe en d , n ,
 & les lignes ET , CB en t , N ; & si la droite qui joint les points
 A , d , coupe EQ & DN en r , M ; les triangles semblables
 CTt , DCN , donnent Ct ou $EQ : Tt :: DN : CN$. Et les trian-
 gles semblables ArR , AMd , donnent $Rr : DM :: Ar : AM$.
 Or à cause des parallèles ST , BC & AB , EQ , DN , on a SE
 $= BQ$, & BQ ou $SE : BN :: Ar : AM :: Rr : DM$, ou Rr
 $SE :: DM : BN$. En multipliant par ordre cette dernière pro-
 portion avec la première, on aura $EQ \times Rr : SE \times Tt ::$
 $NDM : BNC$; comme $rEQ : SEt$ par le premier cas; & en
 divisant, $EQ \times rE - Rr : SE \times Et - Tt$, ou $REQ : SET ::$
 $NDM : BNC$.

Mais comme $Nn = DM$, NDM sera $= DNn$; & par
 conséquent les rectangles REQ , SET , seront dans le rapport
 constant de * DNn à BNC . ** Art. 51. n^o 1.*

Troisième cas. Si l'on tire les lignes Eq , Set , la première
 parallèle au côté AB , & la dernière au côté BC , lesquelles ren-
 contrant les côtés du trapeze, prolongés s'il le faut en r , q , s , t ;
 cela posé, il est évident que tous les angles des triangles qEQ ,
 rER , sES & tET , sont donnés, puisque tous les côtés sont

donnés de position ; & ainsi les rapports de ces mêmes côtés seront aussi donnés : par conséquent aussi le rapport de QER à qEr & de SET à sEt . Or le rapport de qEr à sEt , est donné par le premier cas. Donc le rapport de QER à SET sera aussi donné.

COROLLAIRE I.

Fig. 74.

96. De là il suit que si le rapport des rectangles QER , SET est donné, le reste étant comme ci-dessus, on peut toujours trouver tant de ces points E de la courbe que l'on voudra. Car si l'on tire de l'un des angles C du trapeze, une droite CH , laquelle rencontre AD en I & AB prolongée en H : cela posé, puisque tous les angles de la figure sont donnés, le rapport de EC à EQ , de EC à ET , & par conséquent le rapport de EQ à ET est donné : en divisant le rapport donné des rectangles QER , SET , par celui de EQ à ET , on aura le rapport de ER à ES ; & en ajoutant le rapport de EI à ER & de ES à EH , on aura celui de EI à EH , & par conséquent le point E , puisque IH est donnée.

COROLLAIRE II.

Fig. 75.

97. Si le parallélogramme $BQES$, dont les points angulaires opposés B & E touchent la courbe d'une section conique, est donné ; & si des intersections C , A , des côtés adjacens à l'un de ces angles avec la courbe, on tire des lignes à un autre point D tel qu'on voudra de la courbe, les parties ER , ET des deux autres côtés du parallélogramme, terminées par les lignes CD , AD , seront toujours dans un rapport donné. Car puisque dans la proportion $*REQ : SET :: NDM : BNC$, les lignes EQ , ES sont données, aussi bien que le rapport de NDM à BNC , celui de ER à ET sera aussi donné.

* Art. 95. cas
2.

COROLLAIRE III.

Fig. 76.

98. De là en tirant des points A , C , des lignes Ad , Cd , à quelqu'autre point d de la courbe, lesquelles rencontrent les côtés EQ , ES du parallélogramme $BSEQ$ en r & t , on aura $*ER : ET :: Er : Et$. Et si les lignes $*ER$, ET sont des angles donnés avec les côtés Eq , Es du parallélogramme $BSEQ$, leur rapport sera encore donné, puisque celui de Er à ER , de Et à ET , & celui de Er à Et est donné.

* Art. 97.
† Fig. 73.

COROLLAIRE IV.

99. Si l'on suppose que le point d tombe au point C , la *Fig. 74*
 ligne $A d$ deviendra la ligne AC , & la ligne $C d$ touchera
 seulement la courbe en C . C'est pourquoi si la ligne AC coupe
 la ligne EQ en m , on aura $ER : ET :: E m$ est à la partie de
 ET entre le point E & la tangente. Mais si la ligne DC tombe
 sur AB , les lignes AD , BC deviendront alors deux tangentes
 aux points A & B , & ET deviendra $= ES$. C'est pourquoi le
 rapport de ES^2 à REQ sera donné.

COROLLAIRE V.

100. De là on pourra trouver le lieu de tous les points E , *Fig. 75*
 en supposant le rapport des rectangles faits des lignes tirées de
 ces points E , aux côtés opposés donnés. Car si l'on tire une tan-
 gente * par un des points angulaires B du trapeze $ABCD$, & * *Art. 99*
 d'un autre point A , la ligne AH parallèle à cette tangente, dont
 il faut trouver l'intersection * H avec la courbe; cela fait, la * *Art. 96.*
 ligne BF tirée par le milieu G de AH , sera un diamètre qui
 sera déterminé en trouvant * son sommet F : c'est pourquoi le * *Art. 96.*
 rectangle BGF sera à $\overline{GH}^2$, comme BF est à son paramètre;
 par conséquent la courbe pourra être décrite par l'article 43.

THEOREME XIX.

101. Dans une section conique quelconque, les segmens $BME O$, *Fig. 76-77.*
 $DMFO$, terminés par la courbe & par deux droites, qui joi-
 gnent les intersections de deux parallèles BD , EF , avec la courbe,
 seront égaux.

Car le diamètre HK divisant les lignes EF , BD , en deux
 également, de même que toutes les lignes MM , MM , qui leur
 sont parallèles, aussi bien que ces mêmes lignes, prolongées s'il le
 faut, & terminées par les lignes FD , EB ; c'est pourquoi puis-
 que toutes les lignes correspondantes MO sont toujours égales-
 les unes aux autres, les segmens $BME O$, $DMFO$, seront
 aussi égaux.

COROLLAIRE I.

102. De là il suit qu'ajoutant ou retranchant aux triangles égaux
 DEB , BFD , les segmens $EMBO$, $FMDO$, qui sont
 aussi égaux, les sommes ou différences $DBME$, $BD MF$, se-
 ront encore égales.

COROLLAIRE II.

Fig. 76.

103. Si l'on ajoute le segment BAD aux espaces égaux $EMBD$, $FMDB$, le segment $EBAD$ sera égal au segment $FDA B$. Mais si la ligne BD , au lieu de couper la section, ne fait que la toucher au point A , il est évident que le segment $EBAE$ sera égal au segment $FDAF$.

COROLLAIRE III.

Art. 101.

104. De là il s'ensuit que l'on pourra toujours trouver dans une section conique deux segments $EBAE$, $FDAF$, tels que chacun d'eux soit égal à un segment donné BAD . Car si l'on tire BF parallèle à AD , & DE parallèle à AB , les segments ABA , $DMFO D$ étant entre les mêmes parallèles AD , BF , aussi bien que les triangles BAD , ADF , seront * égaux : donc $FDAF = BAD$. On prouvera de la même manière que $EBAE = BAD$.

THEOREME XX.

Fig. 78. 79.
80.

105. Les secteurs DCF , BCE d'une ellipse ou hyperbole terminés par des lignes tirées du centre aux intersections de deux parallèles BD , EF , avec la courbe, seront égaux.

Car si l'on tire le diamètre CA par les milieux H , K des parallèles BD , EF , & si les lignes CE , CF rencontrent BD , prolongée s'il est nécessaire, en n & r , il est évident que les espaces EBn , FDr , étant les différences entre les trapezes égaux $EnHK$, $FrHK$, & les segments égaux $EBHK$, $FDHK$, sont égaux. Or comme les triangles CBn , CDr , ayant des bases égales Bn , Dr , & la même hauteur CH , sont aussi égaux, le secteur DCF sera égal au secteur BCE .

COROLLAIRE I.

Fig. 78. 80.

106. Si l'on suppose que la ligne BD se meut toujours parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle devienne une tangente en A , il est évident que le secteur ACF sera égal au secteur ACE .

COROLLAIRE II.

107. De là il suit que si l'on tire le diamètre CA par le milieu K de la ligne qui joint les jambes d'un secteur ECF , on aura le secteur ECA égal au secteur FCA .

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

108. Si des points F, D, B, E , où les lignes qui terminent des secteurs égaux FCD, BCE , rencontrent la courbe d'une hyperbole, on tire des lignes parallèles à une des asymptotes CT , & rencontrant l'autre en G, H, K, L , on aura $CG : CH :: CK : CL$. Car les lignes tirées par les points D, B , & F, E , & qui rencontrent les asymptotes en Q, M , & P, N , seront * parallèles; & si l'on tire DS, FT , parallèles à l'asymptote CL , rencontrant l'autre en S, T , les triangles DQS, MBK , & FPT, NEL , seront semblables & égaux, puisque * $PF = EN$ & $QD = BM$. C'est pourquoi $TF : SD$, ou $CG : CH :: PT : QS$, où $EL : BK :: CK : CL$, ou $CG : CH :: CK : CL$. Fig. 81.

* Art. 101.

* Art. 81.

* Art. 80.

COROLLAIRE IV.

109. De là il suit que si les lignes CG, CH, CK , sont en progression géométrique, les secteurs FCD & DCB seront égaux. Car si l'on suppose dans la proportion précédente, que CH soit $= CK$, & que CL devienne $= CK$, on aura $CG : CH :: CH : CK$; & le secteur DCE deviendra le secteur $BCD = DCF$.

COROLLAIRE V.

110. Si dans une asymptote CN d'une hyperbole, on prend tant de parties CG, CH, CK, CL , &c. que l'on voudra, qui soient en progression géométrique; les secteurs correspondans FCD, DCB, BCE , &c. seront égaux. Car puisque $CG : CH : CK$, les secteurs FCD, DCB seront égaux; & parce que $CH : CK : CL$, les secteurs DCB, BCE , seront égaux, & ainsi à l'infini.

COROLLAIRE VI.

111. Par conséquent si CH est la première de deux moyennes proportionnelles entre CG & CL , le secteur FCD sera au secteur FCE comme 1 est à 3; & en général, si m est un nombre entier quelconque, & CH la première de tant de moyennes proportionnelles entre CG & CL qu'il y a d'unités dans $m - 1$, le secteur FCD sera au secteur FCE comme 1 est à m .

TRAITÉ ANALYTIQUE
COROLLAIRE VII.

112. Si $CG:CH::\overline{CK}^2:\overline{CL}^2$, le secteur FCD sera au secteur BCE comme 2 est à 1. Car si CV est prise telle que $CV:CK:CL$, ou $CV \times CL = \overline{CK}^2$, & que l'on tire la ligne VO parallèle à CT, rencontrant la courbe en O, le secteur OCB sera égal au secteur * BCE; ou en composant, $OCE:BCE::2:1$. Et comme $CG:CH::\overline{CK}^2$ ou $CV \times CL:\overline{CL}^2::CV:CL$, les secteurs FCD, OCE seront * aussi égaux. Dont $FCD:BCE::2:1$.

* Art. 109.

* Art. 108.

Mais si $CG:CH::\overline{CK}^3:\overline{CL}^3$, le secteur FCD sera au secteur BCE comme 3 est à 1. Car si $CV \times \overline{CL}^2 = \overline{CK}^3$, le secteur OCB sera au secteur BCE comme 2 est à 1; ou en composant, $OCE:BCE::3:1$. Et à cause que $CG:CH::\overline{CK}^3$ ou $CV \times \overline{CL}^2:\overline{CL}^3::CV:CL$, les secteurs FCD & OCE seront égaux. Par conséquent OCE ou $FCD:BCE::3:1$.

En général, si m exprime un nombre entier quelconque, & si $CG:CH::\overline{CK}^m:\overline{CL}^m$, on prouvera de la même manière que $FCD:BCE::m:1$.

COROLLAIRE VIII.

113. Si $\overline{CK}^m:\overline{CL}^m::\overline{CS}^n:\overline{CT}^n$, on aura $BCE:DCF::n:m$. Car si $CV:CK::\overline{CK}^m:\overline{CL}^m$, on aura * $BCE:OCB::1:m$, & $OCB:DCF::n:1$; *ex æquo*, $BCE:DCF::n:m$.

* Art. 112.

COROLLAIRE IX.

114. Il est aussi évident que chaque trapeze hyperbolique DHKB est égal au secteur correspondant DCB. Car si l'on ôte la partie commune ACH des triangles égaux * BCK, DCH, & que l'on ajoute de part & d'autre l'espace curviligne ABD, on aura $DHKB = DCB$.

* Art. 36.

COROLLAIRE X.

115. De là il suit qu'il est évident que tout ce que nous avons dit à l'égard des secteurs hyperboliques doit aussi s'entendre des trapezes hyperboliques DHKB, qui leur sont égaux.

THEOREME XXI.

116. S'il y a deux hyperboles AM, AN, ou BM, DN, Fig. 82. 83. qui aient le même centre C & le même demi-diamètre AC; & si l'on tire du centre aux extrémités d'une appliquée PN, deux lignes CN, CM, les sécateurs CAM, CAN, ou CBM, CDN, terminés par ces lignes & le demi-diamètre de cette appliquée, seront entr'eux comme les conjugués BC, DC de ce diamètre AC.

Car puisque $\overline{PM}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{PN}^2 : \overline{DC}^2$, ou $PM : PN :: BC : DC$, comme cela arrive toujours, & que les triangles CPM, CPN, ayant la même base CP, sont comme leurs hauteurs PM, PN, ou comme BC, DC, il s'ensuit que CAM : CAN, ou CBM : CDN :: BC : DC.

DEFINITION 16.

Deux figures curvilignes sont appelées semblables, lorsqu'on peut toujours y inscrire deux polygones semblables.

COROLLAIRE.

117. De là il suit que les espaces contenus par des figures curvilignes semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car en concevant des polygones semblables inscrits dans ces figures d'un nombre infini de côtés, il est évident que le rapport de ces polygones peut être pris pour celui des figures mêmes.

THEOREME XXII.

118. S'il y a deux hyperboles BL, DN, qui aient le même centre C, & dont les deux demi-diamètres $CB = a$, $CD = b$, soient proportionnels à leurs paramètres p , q ; & si par les points de rencontre L, N d'un demi-diamètre quelconque avec les courbes, on tire deux appliquées Lp, NP, sur l'un des diamètres que l'on voudra; les espaces CBLp, CDNp, terminés par les courbes, les coordonnées & les demi-diamètres conjugués, seront entr'eux comme les quarrés des demi-diamètres CB, CD parallèles à ces ordonnées.

Car puisque * $\frac{a}{p} \overline{CP}^2 = p \overline{L}^2 - \overline{CB}^2$ & $\frac{b}{q} \overline{CP}^2 = \overline{PN}^2 -$ * Art. 32,

F ij

$\overline{CD}^2$, on aura $\frac{a}{p} \overline{CP}^2 : \frac{b}{q} \overline{CP}^2$, ou $\overline{CP}^2 : \overline{CP}^2 :: p \overline{L}^2 - \overline{CB}^2 :: p \overline{N}^2 - \overline{CD}^2 :: p \overline{L}^2 : \overline{PN}^2$; & en divisant, $\overline{CB}^2 : \overline{CD}^2 :: p \overline{L}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{CL}^2 : \overline{CN}^2$; par conséquent les lignes BL, DN seront toujours parallèles, & ainsi les hyperboles BLM, DN seront semblables: donc les sécateurs CBL, CDN, aussi bien que les triangles semblables CPL, CPM seront comme les quarrés de CB & de CD: c'est-à-dire, CBLP : CDNP :: $\overline{CB}^2 : \overline{CD}^2$.

COROLLAIRE I.

Fig. 24.

119. Si du centre commun C aux deux hyperboles semblables AL, BN, on tire les deux demi-diamètres CB, CN, à volonté, & par leurs intersections avec les courbes, les lignes AD, BE, LF, NG, parallèles à l'asymptote CS, & rencontrant l'autre en D, E, F, G, les trapèzes hyperboliques DALF, EBN G, seront aussi entr'eux comme * $\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$, ou comme $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$.

* Art. 114.
218.

COROLLAIRE II.

120. Si la ligne FL prolongée rencontre la courbe BN en M, & EB la courbe AL en K, on aura EKLF : EBMF :: $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$. Car FL × CF = CD × DA, & FM × CF = CE × EB; donc FL × CF : FM × CF, ou FL : FM :: CD × DA : CE × EB. Or comme cela arrive toujours, & que les triangles CDA, CEB étant semblables, les produits de leurs côtés sont comme les quarrés de ceux qui sont homologues; il s'ensuit que EKLF : EBMF :: $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$.

COROLLAIRE III.

121. Si $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2 :: m : n$, & si les nombres m, n sont commensurables entr'eux, on pourra toujours trouver un espace hyperbolique RTVS qui soit égal à l'espace EBMF dans l'autre hyperbole, le point R étant donné. Car puisque EKLF : EBMF :: m : n, si l'on prend CS telle que * $\overline{CE}^m : \overline{CF}^m :: \overline{CR}^m : \overline{CS}^m$, la ligne SV parallèle à RT déterminera l'espace demandé.

* Art. 113.

THEOREME XXIII.

122. Si trois tangentes à une ellipse ou hyperbole se rencontrent l'une l'autre en L, T, H , & si d'un de ces points T on tire un diamètre TA , & du sommet A une tangente EF , qui rencontre HT, LT en F & E ; & si le diamètre conjugué à TA rencontre aussi les tangentes HT, LT en K, k , on aura $KH : KF :: kE : kL$. Fig. 85. 86.

Car si l'on tire des points H, L , les lignes HB, LD , parallèles à la tangente EF , lesquelles rencontrent TA en B & D , on aura $CB : CA :: KH : KF$, & $CA : CD :: kE : kL$. Or comme $CB : CA :: CA : CD$, il s'ensuit que $KH : KF :: kE : kL$. * Art. 67.

2. Si dans la parabole les trois tangentes rencontrent le diamètre TA en T, E, F , & si des points touchans m, N, M , on tire les appliquées mp, NQ, MP , & par les points de rencontre L, H de deux de ces tangentes avec la troisième, les lignes LD, HB , parallèles à ces appliquées, on aura $2BH = QN + pm$, & $2DL = QN - PM$. Fig. 87.

Car si $PM = y$, $AP = AE = x$, $QN = z$, $AQ = u$, $AT = u$, $DL = a$, & le paramètre $= 1$, on aura $PM : PE :: LD : DE = \frac{2ax}{y}$, ou $DE + EA = DA = \frac{2ax}{y} + x$, & $QN : QT :: DL : DT = \frac{2ax}{x}$, ou $TA - TD = DA = u - \frac{2ax}{x} = \frac{2ax}{y} + x$, ou parce que $x = yy$, $u = zz$, $zz - 2az = 2ay + yy$. Par conséquent $zz - yy = 2ay + 2az$, & en divisant par $y + z$, il viendra $z - y = 2a$ = $2DL$. On prouvera de même que $2BH = QN + pm$. * Art. 122.

COROLLAIRE I.

123. Si l'on tire dans l'ellipse & l'hyperbole une autre tangente lh , qui rencontre TK, Tk , en l, h , on aura $KF : Kl :: kh : kE$; & comme on a aussi $KH : KF :: kE : kL$, on aura *ex aquo*, $KH : Kl :: kh : kL$. Fig. 85. 86.

COROLLAIRE II.

124. De là il suit que le diamètre DB , qui divise par le milieu en u la diagonale Ll du trapeze $LHlh$, dont les côtés touchent une section conique quelconque, divisera aussi la dia- Fig. 88. 89.

Fig. 88.

* Art. 122.

gonale hH par le milieu en r . Car si l'on tire les lignes hb , HB , LD , ld , parallèles au diamètre $*Kk$, & si $CK = Ck = a$, $DL = dl = b$, $BH = x$, $bh = y$, les parallèles LD , hb , kC , donneront $kh : kL :: Ck - bh : Ck - DL :: a - y : a - b$; & les parallèles ld , HB , KC , donneront $KH : Kl :: CK - BH : CK - dl :: a - x : a - b$. Et par conséquent puisque $*KH : Kl :: kh : kL$, on aura $a - x : a - b :: a - y : a - b$, ou $a - x = a - y$, ou $x = y$, $BH = bh$; & par conséquent $hr = rH$.

Fig. 89.

* Art. 124. n.

1.

2. Si dans la parabole on tire par les points touchans les demi-ordonnées MP , nq , mp , NQ au diamètre DQ , on aura $*2 DL = qn - PM$, $2 dl = QN - pm$, $2 BH = QN + PM$, $2 bh = qn + pm$; ainsi si $DL = dl$, c'est-à-dire $qn - PM = QN - pm$, ou $qn + pm = QN + PM$, on aura $BH = bh$, donc $hr = rH$.

THEOREME XXIV.

Fig. 90.

125. Si deux angles mobiles BAK , BDK , tournent autour de leurs points angulaires A , D , fixés dans un plan; je dis que l'intersection B des jambes AB , DB de ces angles, décrira une section conique qui passera par les points A & D , pendant que l'intersection K des autres jambes AK , DK , décrira une droite KF , donnée de position, laquelle ne passera point par les points A , D .

Soit supposé que les jambes AK , DK , passent par un point donné F de la ligne KF , & que C soit l'intersection des autres jambes. Que l'on tire les lignes CK , CS , de manière que les angles ACR , DCS soient égaux aux angles AFK , DFK ; cela posé, puisque les angles KAB , FAC sont égaux aussi bien que KDB , FDC , l'angle $KAFC$ sera égal à l'angle CAR , & $KDF = CDB$; ainsi les triangles AFK , ACR , & DFK , DCS seront semblables; c'est pourquoi, $CR : FK :: AC : AF$, & $FK : CS :: DF : DC$; & en multipliant par ordre, $CR : CS :: AC \times DF : AF \times DC$. Or comme les lignes AC , DF , AF & DC , sont données, le rapport de CR à CS sera aussi donné; & comme les angles DCS , ACR sont aussi donnés, le point B sera toujours dans la courbe d'une section conique qui passe par les points A , C , D .

* Art. 98.

N. B. Lorsque la ligne FK passera par un des points fixes comme D , la jambe DK sera toujours placée sur cette ligne, & ainsi.

L'autre jambe DB sera donnée de position, & par conséquent l'intersection B sera toujours dans la ligne droite DB.

Si les jambes d'un de ces angles tombent l'une sur l'autre, la proposition sera la même qu'auparavant.

COROLLAIRE I.

126. De là il s'en suit que si la jambe AB tombe sur la ligne AD, la jambe DB deviendra une tangente à la section en D; & si la jambe DB tombe sur la ligne DA, la jambe AB deviendra une tangente en A, puisque dans l'un & l'autre cas les jambes ne rencontrent la section que dans un seul point, & tombent entièrement en dehors de la même.

COROLLAIRE II.

127. Si les jambes AK, DK, tombent sur la ligne DA, en sorte que les angles mobiles BAK, BDK deviennent les angles VAL, EDL, l'angle E fait par la rencontre des autres jambes, prolongées de l'autre côté des points A & D, sera égal à la différence des deux angles mobiles à deux angles droits. Car les quatre angles VAD, EAD, EDL, EDA, valent ensemble quatre droits, & les trois EAD, EDA, AED, valent deux droits; donc en soustrayant les derniers des premiers, on aura $VAD + EDL - E =$ à deux droits.

COROLLAIRE III.

128. Si l'on décrit la circonférence de cercle AGDH par les points fixes A, D, en sorte que le segment AGD du côté de la ligne KE, soit capable de contenir un angle égal à la différence des deux angles mobiles à quatre droits; & si les jambes AL, DF des angles mobiles passent par l'intersection G de la circonférence & du diamètre HG, qui est perpendiculaire à la ligne KF; les deux autres jambes AX, DN seront parallèles à l'un des axes de la section. Car puisque les angles NDG, XAG, & G valent ensemble quatre angles droits, par construction, & les trois angles du triangle AGD en valent deux, les deux angles NDA, XAD vaudront aussi deux droits, & par conséquent les jambes ND, XA seront parallèles. Or si l'on joint les points de rencontre N, L, X, F, des jambes avec la courbe & la ligne KF, & le point H aux points fixes A & D par des droites, les triangles rectangles semblables

Fig. 234

HAG, GTL, & HDG, GTF, donneront $AG \times GL = HG \times GT = DG \times GF$. Et comme les côtés adjacens aux angles opposés en G sont proportionnels, les triangles AGF, DGL seront semblables; ainsi les angles GAF, GDL, ou leurs égaux NAX, NDX, aussi bien que leurs alternes AND, DXA, seront égaux. C'est pourquoi la perpendiculaire QM, qui divise ND par le milieu, divisera de même AX; & par conséquent sera l'un * des axes.

* Art. 73.

THEOREME XXV.

Fig. 91.

129. Toutes choses étant de même que ci-dessus, je dis que dans l'ellipse & l'hyperbole les parties HT, TG du diamètre HG, prolongé s'il le faut, terminées par la ligne FK, expriment le rapport entre cet axe, qui est parallèle aux côtés DN, AX, & son parametre.

Soit supposé que la jambe AB de l'angle mobile KAB soit perpendiculaire aux lignes AX, DN; du point F soient tirées FV, FS, & du point K la ligne KR, perpendiculaires aux lignes KA, AL, & à DF prolongée. Cela posé, si $TH = a$, $TG = p$, $TF = r$, $TL = s$, $LF = c$, $GF = n$, $GL = m$, $FK = v$, $AP = d$, $DP = x$, $PB = y$, les triangles semblables GTF, KRF, GDH, donneront $FR = \frac{rv}{n}$, $KR = \frac{rv}{n}$, & $GD = \frac{ap - pp}{n}$. Ainsi $DG + GF + FR = DR = \frac{ap + rr + rv}{n}$, parce que $n = rr + pp$; & à cause des triangles semblables DRK, DPB, nous aurons $DR : RK :: DP : PB$, ou $apy + rry + rvy = pvx$, & $v = \frac{apy + rry}{px - rj}$.

Or puisque les angles XAL, BAK, sont égaux, & que l'angle XAB est droit, par hypothese, l'angle KAG sera aussi droit; ainsi les lignes KA, AH, seront une même ligne droite. C'est pourquoi les triangles semblables HTK, FVK, GTL & LSF donneront 1°. $GL : LT :: KF : FV = \frac{ap - rv}{m}$. 2°. $GL : GT :: LF : FS = VA = \frac{pe}{m}$. 3°. $LT : TG :: HT : TK = \frac{ap}{r}$. Ainsi $TK - TF = v = \frac{ap - rv}{px - rj} = \frac{apy + rry}{px - rj}$, ou $apx - r s x = acy$, parce que $c = r + s$. Enfin les triangles semblables AVF, APN, donneront $AV : VF :: AP : PN = \frac{d}{pe}$.

$\times ap - rs$; c'est pourquoi $DPN = \frac{dx}{pc} \times ap - rs$, ou $\frac{p}{a} \times DPN = apx - rsx = acy$. Par conséquent $DPN : APB :: a : p$.

COROLLAIRE I.

130. Lorsque la ligne KT tombera en dehors du cercle AGD , l'intersection B décrira la courbe d'une ellipse. Car l'angle AKD étant toujours moindre que la différence entre la somme de deux angles mobiles & quatre angles droits, les jambes AB , DB se couperont toujours, en quelque endroit que le point K puisse tomber. Par conséquent la courbe décrite par le point B rentrera en elle-même, & par conséquent elle sera une ellipse.

2. Lorsque la ligne KT coupera le cercle AGD , l'intersection B décrira la courbe d'une des hyperboles opposées, parce que lorsque l'intersection K tombe sur celle de la ligne KT & de la circonférence, les jambes AB , BD , deviennent parallèles *: c'est pourquoi chacune d'elles ne rencontrera la courbe * *Art. 128.* que dans un point dans cette position; & comme il n'y a que les lignes qui soient parallèles aux deux asymptotes d'une hyperbole, qui ne rencontrent une section conique que dans un point, n'étant point parallèles, il s'ensuit que le point B décrira la courbe d'une des hyperboles dans ce cas.

3. Et lorsque la ligne KT ne fera que toucher le cercle AGD , l'intersection B décrira la courbe d'une parabole, puisqu'il n'y a qu'une seule position des jambes AB , DB , dans laquelle elles ne rencontrent la courbe que dans un point.

N. B. L'axe parallèle aux lignes AX , DN sera toujours le premier, puisqu'il sera toujours plus grand dans l'ellipse que son paramètre, & il est toujours dans le même angle fait par les asymptotes que les hyperboles opposées.

COROLLAIRE II.

131. Le rapport du premier axe à son paramètre étant donné, *Fig. 93:* on pourra décrire la courbe d'une ellipse ou hyperbole par quatre points donnés A , B , D , E . Car que l'on en joigne trois, comme A , E , D , par des lignes droites, & que l'on décrive sur AD , comme corde, un arc circulaire AHD , de l'autre côté des points A , D , à l'égard du point E , en sorte que le segment AHD puisse contenir l'angle AED ; cela posé, si l'on fait passer les jambes des angles BAK , BDK , égaux aux compléments VAD , LDE ,

G

des angles DAE, ADE, à deux droits, par le quatrième point B, la ligne KT, tirée par l'intersection K de deux autres jambes, & tangente au cercle L T t, décrit du même centre C que le cercle AHD, & dont le rayon CT soit au rayon CG, comme $a \pm p$ est à $a \mp p$, la ligne KT, dis-je, servira à décrire la courbe demandée.

* Art. 127.

Dans la parabole la ligne KT est tirée du point K tangente au cercle DGA.

N. B. Puisqu'on peut toujours mener d'un point donné hors d'un cercle deux tangentes à ce cercle, il s'ensuit qu'on peut aussi décrire les courbes de deux sections coniques par quatre points donnés.

THEOREME XXVI.

Fig. 94.

132. Les courbes de deux sections coniques quelconques ne peuvent se couper que dans quatre points.

Soient m, H, K, n , quatre points contigus, où les courbes $nKFm$ & $nKLHm$ se coupent; soient tirées les lignes mH, nK , lesquelles se rencontrent en T, & soit fait $TH: Tm :: RH: Rm$, & $TK: Tn :: SK: Sn$. Cela posé, puisque les parties d'une droite quelconque TE, terminées par le point T & les courbes, sont toujours comme * celles de la même ligne terminées par les courbes & la ligne RS; & comme la ligne TE rencontre toujours les courbes en deux points L, F, d'un côté de la ligne RS, par hypothèse, il s'ensuit qu'elle rencontrera aussi toujours les courbes en deux points de l'autre côté.

* Art. 53.

PROBLEME IV.

Fig. 90.

133. Décrire la courbe d'une section conique par cinq points A, B, C, D, E, donnés de manière qu'on n'en puisse joindre que deux par une ligne droite.

Ayant joint trois de ces points que l'on voudra, comme A, D, E, par des droites, & fait les angles BAK, CAF, chacun égal au complément VAD de l'angle DAE à deux droits, & les angles BDK, CDF, chacun égal au complément LDE de l'angle ADE, le point ou intersection B des jambes AB, DB des angles mobiles KAB, KDB, en tournant autour des points A, D, décrira la courbe demandée, pendant que l'intersection K des autres jambes AK, DK, décrit la droite * tirée par les points K, F.

* Art. 125.

AUTREMENT.

D'un de ces points donnés E, soient tirées les lignes EQ, Fig. 95.
ET, parallèles aux côtés AB, BC du trapeze formé par les
lignes qui joignent les quatre autres points donnés A, B, C, D,
lesquelles rencontrent les quatre côtés en R, Q, S, T: cela
posé, si l'on tire du point C la ligne Cf parallèle à BA, & de
son intersection f avec ST, la ligne fr parallèle à TR, ren-
contrant EQ en r, l'intersection d des lignes Cf & Ar sera
dans la courbe. Car à cause des parallèles TR, fr, on a ET:
ER :: Ef: Er; par conséquent le point d est dans la courbe
d'une * section conique qui passe par les cinq points A, B, C, * Art. 98.
D, E.

Et si l'on tire Ae parallèle à BC, & par son intersection u
avec EQ, la ligne ug parallèle à RT rencontrant ET en g,
le point d'intersection e des lignes Cg & Au sera aussi dans
la courbe. C'est pourquoi l'intersection O des lignes tirées par
les milieux des parallèles AB, dC, & BC, Ae sera le * cen- * Art. 36.
tre: cela supposé:

Si les lignes CB, CA, prolongées s'il le faut, rencontrent
le diamètre Mm, auquel BA, cd sont ordonnées en t & P;
& si OM = Om est prise moyenne proportionnelle entre
OP & Ot, les points M, m, seront dans * la courbe. On * Art. 54. 56.
trouvera de la même manière les sommets N, n du diamètre
Nn conjugué à Mm; & par conséquent on pourra décrire la
courbe par l'article 43.

N. B. I. Lorsque Mt > MP, la section sera une ellipse; lors-
que Mt < MP, une hyperbole; & lorsque Mt = MP, elle sera
une parabole.

II. Puisque la position de la ligne FK est déterminée par les Fig. 90.
intersections des jambes AK, DK, lorsque les autres AB, DB
passent par les deux points donnés B & C, & puisque les an-
gles mobiles sont déterminés par le moyen de trois autres points
donnés A, D, E, il s'ensuit qu'une section conique ne peut
passer que par cinq points donnés; & comme les courbes de
deux sections ne se peuvent couper qu'en quatre * points, il * Art. 132.
suit aussi que l'on ne peut décrire qu'une seule courbe des sec-
tions coniques par cinq points donnés.

PROBLEME V.

Fig. 96. 97. 134. Décrire la courbe d'une section conique par quatre points donnés A, B, C, E, & qui touche une droite bT donnée de position.

Fig. 96.

Premier cas. Supposé que le point touchant soit aussi un des points donnés C. Si l'on joint trois de ces points A, B, C, par des droites, & que l'on tire du quatrième E les lignes ST, EQ, parallèles à BC, AB, lesquelles coupent les lignes BC, AC, AB, en Q, R, S, & la tangente en T: cela posé, si l'on prend dans ST, EQ, les points ι , r , tels que $ER : ET :: Er : E\iota$, l'intersection d des lignes tirées par les points A, r & C, ι , sera dans la * courbe; & par conséquent elle pourra être décrite par le moyen * des cinq-points donnés A, B, C, d , E.

* Art. 93.

* Art. 133.

Fig. 97.

Deuxième cas. Soit G le point de rencontre des deux lignes tirées par les quatre points donnés, & T, b leurs intersections avec la tangente. Si les rectangles $AbB = aa$, $BGA = bb$, $EGC = cc$, $CTE = dd$, le point D pris dans la tangente, tel que $bD : DT :: a : \frac{bd}{c}$, sera le point touchant. Car si la ligne TS parallèle à AB, coupe la courbe en R, S, on aura * $EGC : BGA :: CTE : RTS = \frac{bbdd}{cc}$, & * $bD : DT :: \sqrt{AbB} (a) : \sqrt{RTS} \left(\frac{bd}{a}\right)$.

* Art. 43.

* Art. 50.

N. B. Comme on peut prendre le point D, ou entre les points T, b , ou en dehors, excepté lorsque les rectangles AbB , RTS sont égaux, il s'ensuit que l'on peut décrire les courbes de deux sections coniques par quatre points donnés, & qui touchent une droite donnée de position.

PROBLEME VI.

Fig. 98.

135. Décrire la courbe d'une section conique par trois points donnés B, C, D, & qui touche deux droites AT, PT, données de position.

* Art. 65.

Soient tirées les lignes DC, CB par les points donnés, lesquelles rencontrent les tangentes en I, L, E, H, & soit KL : KI :: $\sqrt{CLD} : \sqrt{DIC}$, & $ER : RH :: \sqrt{CEB} : \sqrt{BHC}$, la ligne tirée par les points R, K, * déterminera les points touchans A, P. C'est pourquoi la courbe peut être décrite comme ci-dessus.

PROBLEME VII.

136. *Décrire la courbe d'une section conique par deux points Fig. 99. donnés D, E, & qui touche trois droites AT, TN, NC, données de position.*

Si la ligne qui passe par les points donnés rencontre les tangentes en L, P, F, & si $KL : KF :: \sqrt{ELD} : \sqrt{DFE}$, & $Fa : Pa :: \sqrt{DFE} : \sqrt{EPD}$, les points K, a seront ceux où la ligne DE * coupe les lignes qui joignent les points touchans B, A * Art. 65. & A, C; & si l'on tire une ligne du point K au point de rencontre N de deux tangentes, coupant la troisième en R, & que l'on fasse $KR : KN :: Rr : rN$, le point r sera dans * la ligne AC. * Art. 65. C'est pourquoi la ligne tirée par les points r & a, donnera les points touchans A, C, & la ligne tirée par les points K, A, donnera le point touchant B; & par conséquent la courbe peut être décrite.

PROBLEME VIII.

137. *Décrire la courbe d'une section conique par un point Fig. 100. donné E, & qui touche quatre droites NT, TM, MH, HN, données de position.*

L'intersection (a) des diagonales HT, NM du trapeze formé par ces tangentes, sera la même que celle des lignes qui joignent les points touchans A, C, & B, D; c'est pourquoi si la ligne tirée par ce point (a) & le point donné E, coupe trois de ces tangentes en L, P, F, & si $aF^1 : aP^1 :: SFE : EPS$, le point S sera * dans la courbe. Mais si $ELS : SFE :: \overline{KL}^1 : \overline{KF}^1$, * Art. 65. le point K sera dans la ligne qui joint les points touchans B, A, duquel tirant une ligne au point de rencontre N des tangentes NT, HN, rencontrant la tangente TM en R, & si $KN : KR :: rN : rR$, le point r sera * dans la ligne qui joint les points touchans A, C. Par conséquent la ligne tirée par les points r, a, donnera les points touchans A, C; la ligne tirée par les points K & A donnera le point touchant B; enfin la ligne tirée par les points B & a donnera le point touchant D. * Art. 65.

PROBLEME IX.

Fig. 101.

138. Décrire la courbe d'une section conique qui touche cinq droites GH; HM, TK, MF, FG, données de position.

* Art. 67.

L'intersection a des diagonales GN, TF du trapeze GTNF, sera aussi l'intersection * des lignes tirées par les points touchans A, D & B, E; l'intersection b des diagonales GM, HF du trapeze GHMF, sera celle des lignes tirées par les points touchans A, C & B, E, & l'intersection n des diagonales GL, HK du trapeze GHLK, sera aussi celle des lignes tirées par les points touchans B, D & A, C. C'est pourquoi par le moyen des trois points donnés a, b, n , on pourra trouver les points touchans, & par conséquent décrire la courbe.

REMARQUE.

Fig. 102.

I. Dans les cinq derniers problèmes, le centre ou foyer d'une section conique doit être pris pour deux points, & une asymptote pour deux tangentes. Par exemple, si les deux asymptotes EN, BP des hyperboles opposées AQ, DR, & la tangente EF sont données, il est visible que la tangente EF est parallèle & égale au * diamètre conjugué du diamètre a A, qui passe par le point touchant A, & par conséquent divise la tangente en deux également.

* Art. 87.

* Art. 82.

II. Si un point D de la courbe & les asymptotes sont données, en tirant DB à volonté, qui rencontre les asymptotes en N, B, & en faisant BR = DN, le point R sera * dans la courbe.

Fig. 95.

III. S'il y avoit trois points Q, R, D de la courbe, & l'asymptote EN donnés, en tirant deux lignes par ces points, lesquelles rencontrent l'asymptote donnée en L, N, & en faisant BR = DN, & QP = DL, les points P, B seront dans l'autre asymptote, laquelle est par conséquent donnée de position.

Fig. 99.

IV. Si le centre O & trois points A, B, C de la courbe d'une ellipse ou hyperbole sont donnés; soit tiré le diamètre Mm par le milieu de la ligne AB qui joint deux de ces points, & soient joints les points A, C, & le reste pourra s'achever selon l'article 133.

V. Si le centre O, le point m de la courbe, & deux tangentes TA, TB sont donnés, il est évident que la ligne AB, qui joint les points touchans A, B, est ordonnée au diamètre TO, & donnée de position. Car que l'on prenne le segment circulaire atb

capable de contenir l'angle ATB , & que l'on fasse l'angle dab égal à l'angle QTB ; cela posé, si du point de rencontre d de la ligne ad & de la circonférence on tire la ligne dt par le milieu q de la ligne ab , les triangles ATB , atb , & QTB , qtb seront semblables; & par conséquent $bq:qt::BQ:QT$. Cela suppose,

Si l'on tire un diamètre par le point donné m , & que l'on trouve * le point K , où ce diamètre rencontre la ligne BA , on n'aura qu'à tirer la ligne KB parallèle à la ligne donnée de position, ou ce qui est la même chose, faire en sorte que l'angle TQA soit égal à l'angle tqa , pour avoir les points touchans A & B . An. 136.

VI. Enfin si le centre O & trois tangentes AT , TN , NC sont données, il est évident que les rapports des côtés de chaque triangle ABT , BCN & ABC sont donnés, puisque les lignes AB , AC , BC sont, par la précédente, parallèles à des lignes données de position. C'est pourquoi si $BT = x$, $BN = a - x$, $AB = \frac{bx}{a}$, $BC = \frac{ac - cx}{a}$, & $AB:BC::d:n$, ou $bnx = acd - cd x$, on aura $x = \frac{acd}{bn + cd}$. La valeur de x donnera le point touchant B , par le moyen duquel on trouvera les deux autres A & C .

L E M M E I.

139. Si l'angle mtn , & le rapport des sinus ds , dr de deux parties mtd , dtn de cet angle sont donnés, la ligne td sera donnée de position. Fig. 103.

Car si l'on tire tc perpendiculaire sur la subtendante mn de l'angle donné, les triangles semblables mct , msd , & nct , nrd donneront $tc:tn::dr:dn$, & $tc:tn$ ou $tm::ds:dm$. C'est pourquoi $dr:dn::ds:dm$; par conséquent le rapport des lignes md , dn étant donné, aussi bien que la ligne nm , la ligne td sera donnée de position.

L E M M E II.

140. Trois points A , B , C étant donnés, en trouver un quatrième D tel que les différences des lignes AD , BD , CD soient données. Fig. 104.

Soient $BD = u$, $AD = c + u$, $CD = d + u$, $AB = a$, $BC = b$; & soient prises $BP = \frac{aa - cc}{2a}$, $BQ = \frac{bb - dd}{2b}$, &

des points P, Q, D, soient tirées PS, DF, & QR, DE perpendiculaires, & DS, DR parallèles aux lignes AB, BC. Cela posé, si $DS = FP = x$, $DR = EQ = y$, BF sera $x - \frac{aa+cc}{2a}$, BE $= y - \frac{bb+dd}{2b}$, & à cause des triangles rectangles AFD, BFD, & CED, BED, on a $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2AB \times BF$, ou $cu = ax$, & $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + 2BC \times BE$, ou $du = by$. En faisant évanouir u , on aura $bcy = adx$; & par conséquent puisque le rapport des lignes DS (x) DR (y) est donné, la ligne tirée par le point de rencontre T des lignes PS & QR, au point D, sera donnée de position.

Si la ligne TD coupe la ligne CB en a , les triangles semblables TQa, TRD donneront $aQ(n) : aT(m) :: DR(y = \frac{du}{b}) : DT(z = \frac{dmu}{nb})$. Par conséquent si la ligne rX est tirée telle que $rT : rx :: dm : bn$, la ligne BD tirée du point B parallèle à rx , rencontrera la ligne TD au point cherché D.

PROBLEME X.

Fig. 109.

141. Le foyer F & les trois points N, L, M de la courbe d'une section conique étant donnés, trouver l'axe & l'autre foyer f.

* Art. 14.

Puisqu'on a toujours $*fM \pm FM = Aa = fN \pm FN = fL \pm FL$; il est évident que les différences des lignes tirées des trois points donnés N, L, M au foyer cherché f , sont données; il s'ensuit qu'en trouvant le foyer f par le lemme précédent, on n'aura qu'à tirer une ligne par ces foyers, laquelle étant $= fM \pm FM$, sera l'axe demandé.

AUTREMENT.

Si l'on joint le foyer donné aux points donnés par des droites, & si l'on prend dans NM, NL prolongées, les points P & D, tels que $FN : FM :: NP : MP$, & $FN : FL :: ND : LD$, la ligne FB perpendiculaire à la ligne tirée par les points P, D, sera l'axe.

Car en tirant les lignes NK, LQ, MH, perpendiculaires à DP, les triangles semblables DQL, DKN, & PHM, PKN donneront $ND : LD :: NK : LQ$, comme $FN : FL$ par construction, & $NP : MP :: NK : MH :: NF : MF$. C'est pourquo

pourquoi le point B représente ici le point * E dans les figures * Art. 3. 4.
 1. 2. 3; & par conséquent si l'on fait $QL : LF :: BA : AF$,
 on aura * le sommet A du premier axe; & ainsi on peut achever * Art. 4.
 la construction selon l'article cinquième.

COROLLAIRE I.

142. Si au lieu de trois points il y avoit deux points & une tangente, ou un point & deux tangentes données, il est évident que l'autre foyer & le premier axe peuvent être trouvés de la même manière que ci-dessus. Qu'il y ait, par exemple, deux points & une tangente donnés.

Si l'on tire du foyer donné F, la ligne FD perpendiculaire à Fig. 108.
 la tangente DI donnée, & si l'on prend $DL = DF$, la ligne Lf sera égale * au premier axe; c'est pourquoi la différence * Art. 15:
 à une autre ligne, tirée d'un point donné de la courbe au foyer cherché, sera donnée.

Mais s'il y avoit trois tangentes EM, HN, DI données; du foyer donné F soient tirées les lignes FM, FD, FN perpendiculaires à ces tangentes: le centre C du cercle dont la circonférence passe par les trois points M, D, N, sera aussi le centre * de la section. * Art. 17.

COROLLAIRE II.

143. La ligne FP, qui joint le foyer & le point de rencontre Fig. 109
 P des droites MN & BP, divisera le complément EFM de l'angle NFM (fait par les lignes tirées des points M, N au foyer F) à deux droites en deux également. Car si l'on tire MT parallèle à NE, rencontrant FP en T, on aura $PM : PN :: MT : NF :: MF : NF$. Donc $MT = FM$. Par conséquent l'angle MFT est égal à l'angle MTF, & celui-ci égal à son alterne EFT. * Art. 14.



SECTION II.

DES SECTIONS CONIQUES

CONSIDÉRÉES DANS LE SOLIDE.

DEFINITIONS.

Fig. 113. 1. **S** I une ligne droite KY , tirée par un point fixe K , pris hors d'un plan dans lequel est décrite la circonférence $YxXy$ d'un cercle, est indéfiniment prolongée vers le haut, & tourne autour de cette circonférence, chaque surface décrite dans ce mouvement par les parties de la ligne KY , séparée par le point K , est nommée *surface conique*, & les deux ensemble *surfaces coniques opposées*.

2. Le point fixe K , qui est commun aux deux surfaces, est nommé le *sommet*; & le cercle $YxXy$, la *base*.

3. Le solide renfermé entre la base $YxXy$ & la surface entre la base & le sommet, est appelé *cone*.

4. Toute ligne KY tirée du sommet K à un point Y de la circonférence de la base, est appelée *côté* du cone.

5. La ligne tirée du sommet au centre du cercle de la base, est nommée l'*axe* du cone.

6. Le cone est appelé *droit* ou *oblique*, selon que l'axe est perpendiculaire ou oblique à la base.

Fig. 112, 113, 114. 7. Si un plan KDd passe par le sommet du cone, parallèle à une section MAN du cone & d'un plan, la ligne indéfinie Dd , formée par la rencontre du plan KDd avec celui de la base, est appelée *directrice*.

N. B. Nous ne considérons ici que les sections qui se font avec le cone droit & un plan.

8. Si la directrice Dd tombe en dehors de la base du cone, la section $*MANa$, est appelée *ellipse*; si Dd coupe la base, elle est appelée ** hyperbole*; & si Dd touche la base, on la nomme ** parabole*.

Fig. 113. La section nam du plan hyperbolique & la surface opposée du cone, est appelée *hyperbole opposée* à la première MAN .

9. Une ligne droite tirée dans le plan d'une section conique, qui ne rencontre la section que dans un point, & qui étant prolongée ne coupe ni ne tombe en dedans de la section, est appelée *tangente*.

COROLLAIRE I.

144. Il est évident par la génération du cône, que toutes sections KD , Kd d'un plan qui passe par le sommet K du cône avec sa surface, sont des lignes droites. Fig. 113.

COROLLAIRE II.

145. Tous les côtés du cône rencontrent le plan elliptique, Fig. 114. puisqu'ils rencontrent tous le plan KDd en K , qui lui est parallèle, & qui passe par le sommet K ; ce qui montre que l'ellipse rentre en elle-même.

COROLLAIRE III.

146. Tous les côtés du cône, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan hyperbolique, excepté les deux KD , Kd , qui passent par les points de rencontre de la directrice & la circonférence de la base, puisqu'ils rencontrent tous le plan DKd , qui lui est parallèle au point K . Fig. 115.

De plus, les côtés de la partie du cône $KdYD$ rencontrent la courbe hyperbolique NAM , & les côtés prolongés de la partie $KdXD$ rencontrent la courbe nam hyperbolique opposée. De là on voit que les hyperboles opposées s'étendent à l'infini.

COROLLAIRE IV.

147. Enfin tous les côtés du cône, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan parabolique, excepté KD qui passe par le point touchant D de la directrice & de la base; puis ils rencontrent tous le plan KDd , qui lui est parallèle, au sommet K . Ce qui fait voir que la parabole s'étend à l'infini. Fig. 114.

LEMME III.

148. Si un plan $EFGH$ tourne autour de la ligne EF comme axe, ses intersections GH , gh , avec un autre plan AB , seront toujours des lignes droites. Fig. 107. 108.

1. Si l'axe EF est parallèle au plan AB , toutes les intersections Fig. 107.

Hij

lions GH, gh de ces plans seront parallèles à l'axe EF, & par conséquent parallèles entr'elles.

Fig. 108.

II. Mais si l'axe EF n'est pas parallèle au plan AB, les intersections GH, gh se rencontreront toujours dans le même point G où l'axe EF, prolongé s'il le faut, rencontre ce plan.

Cela est si évident par soi-même, qu'il ne faut point de démonstration.

LEMME IV.

Fig. 109. 110.

149. Si dans un rayon CA d'un cercle prolongé s'il le faut ; on prend $\frac{CB}{CA} = \frac{CS}{CA}$, & si la ligne DB est tirée perpendiculaire sur CA ; je dis que la ligne ab qui joint les points touchans de deux tangentes tirées d'un point quelconque de la ligne DB, passera toujours par le point S.

Car tirant par le centre C la ligne CD au point de rencontre de ces tangentes, qui coupent ab en P, on aura à cause des triangles rectangles semblables, CBD, CPS ; $CP : CS :: CB : CD$, ou $CS \times CB = \overline{CA}^2 = CP \times CD$. Donc, &c.

LEMME V.

Fig. 111.

150. Si les lignes Da, Db touchent un cercle en a & b, & si du point D de leur rencontre on tire une ligne DY, qui rencontre la circonférence en X, Y, & la ligne ab en S, je dis que $DX : DY :: SX : SY$.

Par les points Y, X soient tirées les lignes Yy, Xx, parallèles à ab, lesquelles rencontrent la courbe en y, x, & la tangente Da en E & F : cela posé, la ligne tirée par les points x, y passera aussi par le point D ; c'est pourquoi $DE : DF :: EX : FY :: Ex : Fy$, ou $\overline{DE}^2 : \overline{DF}^2 :: xEX = \overline{aE}^2 : yFy = \overline{aF}^2$; ainsi $DE : DF :: aE : aF$, par conséquent $DX : DY :: SX : SY$.

THEOREME XXVII.

Fig. 115. 116.

151. Si deux droites MN, mn terminées dans une section conique sont parallèles à deux autres droites KD, Kd données de position ; je dis que les rectangles MPN, mPn faits de leurs parties terminées par la section & leur intersection, sont toujours dans un rapport donné.

Les plans qui passent par les parallèles KD, MN, & Kd, mn, forment deux droites YXD, yxd dans le plan de

DES SECTIONS CONIQUES.

61

la base ; les droites KMY , KNX , & Kmy , Knx dans la surface du cone, & leur commune section la droite KPS , laquelle rencontre le plan de la base au même point S que les droites YXD , $yx'd$ se coupent. Cela posé, si l'on tire par le point S la ligne RV dans le plan YKD , parallèle à MN , & ru dans le plan yKd , parallèle à mn , & que l'on fasse $DK = a$, $dK = b$, $YD = y$, $DX = x$, $yd = z$, & $dx = v$, les triangles semblables KPM , KSR , & KPN , KSV , aussi bien que KPm , Ksr , & KPn , Ksu donneront $\overline{KP}^2 : \overline{KS}^2 :: MPN : RSV :: mPn : rSu$. Et à cause des parallèles KD , RV , on a $YS : RS :: YD (y) : DK (a)$, & $SX : SV :: DX (x) : DK (a)$; & en multipliant par ordre, $YSX : RSV :: xy : aa$, ou $RSV = \frac{aa}{xy} \times YSX$. On trouvera de même que $rSu = \frac{bb}{vz} \times ySx$. C'est pourquoi $MPN : mPn :: \frac{aa}{xy} \times YSX : \frac{bb}{vz} \times ySx$. Or comme les lignes $dK (b)$, $DK (a)$, aussi bien que les points d , D sont donnés, & que par la propriété du cercle les rectangles YSX , ySx sont égaux, & les rectangles $YDX (xy)$, $yd x (vz)$ demeurent toujours les mêmes en quelques endroits que les lignes DY , dy soient tirées, il s'ensuit que le rectangle MPN est au rectangle mPn dans le rapport donné de $\frac{aa}{xy}$ à $\frac{bb}{vz}$.

COROLLAIRE I.

152. Il est évident que si dans l'hyperbole la ligne MN de- Fig. 117.
vient parallèle à un des côtés du cone qui passe par l'intersection de la directrice avec la circonférence de la base, ou dans la parabole au côté $*KD$, qui passe par le point touchant de la Fig. 114.
directrice & de la circonférence, cette ligne MN ne rencontrera la courbe de la section que dans un point M , & le rectangle mPn sera alors à MP , multiplié par une constante, dans un rapport donné.

Car si l'on tire par le point P la ligne ab dans le plan YKX parallèle à YX , & le reste étant comme auparavant, on aura $mPn : aPb :: rSu : YSX$, ou parce que $*rSu = \frac{bb}{vz} \times ySx$, * Art. 151.
& $YSX = ySx$ par la propriété du cercle, cette proportion deviendra $mPn : aPb :: \frac{bb}{vz} \times ySx : ySx :: bb : vz$; mais la ligne Pb est donnée, puisque MP est parallèle à KX , & que aP

est toujours comme PM ; par conséquent les rectangles mPn , $MP \times Pn$ sont dans un rapport donné.

COROLLAIRE II.

Fig. 115-116. 153. Si l'on suppose que le plan $y m K d x$ tourne autour de $K d$ comme un axe, il est évident que toutes les sections $m n$ de ce plan avec le plan $M m N$ parallèle à l'axe $K d$, seront toujours parallèles * entr'elles; & toutes les sections $d y$ dans le plan de la base du cône, passeront toujours * par le point d . Et lorsque le plan $y m K d x$ ne fera que toucher le cône aux côtés $K Y$, $K X$, la section $m n$ deviendra les tangentes Me , Nf .

* Art. 148. n.

1.

* Art. 148. n.

2.

COROLLAIRE III.

154. De là il suit que si le plan $Y K X$ passe par les points touchans Y , X des tangentes tirées du point d à la base du cône, la ligne $m n$ sera toujours divisée en deux également en P par la ligne $M N$, en quelque endroit que le plan $y m K d x$ puisse passer. Car on aura * $y S : y d :: x S : x d$, & * $y S : y d :: r S : K d$, de même $x S : x d :: S u : K d$. Donc puisque $r S = S u$, & que $r u$, $m n$ sont parallèles, il s'ensuit que $m P = P n$.

* Art. 150.

* Art. 154.

COROLLAIRE IV.

Fig. 115-116. 155. Si dans l'ellipse & l'hyperbole le point angulaire d du plan $y m K d x$ se meut le long de la directrice $D d$, il est évident que la ligne $K d$ demeurera toujours parallèle au plan $M m N$ de la section, & la ligne $Y X$, qui joint les points touchans des tangentes, tirée du point d à la base du cône, passera toujours par un * point donné. C'est pourquoi le plan $Y K X$ tournera autour d'une ligne comme un axe, laquelle par conséquent divisera toujours $M N$ en * deux également, puisque $D X : D Y :: S X : S Y$.

* Art. 149.

* Art. 154.

COROLLAIRE V.

* Art. 154. 156. Puisque la ligne $M P$ divise toujours * les parallèles *Fig. 115-116.* $m n$ en deux également, il s'ensuit qu'elle est un diamètre. D'où l'on voit que tous les diamètres d'une ellipse ou hyperbole se divisent l'un l'autre en deux également dans un même * point, lequel est par conséquent le centre; & que tous les diamètres de la parabole sont parallèles au côté $K X$ du cône qui passe par le point touchant X de la directrice $d X$, & par conséquent ils sont tous parallèles entr'eux.

* Art. 155.

217.

* Art. 155.

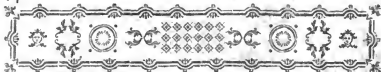
THEOREME XXVIII.

157. Si l'on coupe un cylindre droit Ab par un plan oblique Fig. 112. $BMAN$, la section $BMAN$ sera une ellipse.

Car si deux paralleles quelconques MN , mn terminées dans la section, sont coupées par une troisième ligne AB , aussi terminée dans la section aux points P , p , les plans qui passent par ces lignes perpendiculairement à la base, formeront dans la surface les paralleles Aa , Bb , Mm , Nn , xy , yx ; & dans la base les paralleles rx , sy , & la ligne ab ; & leurs sections communes, les lignes pu , PV . Cela posé, on aura à cause des paralleles, 1°. $aV : au :: AP : Ap$; 2°. $bV : bu :: PB : Bp$; & en multipliant par ordre, $aVb : aub :: APB : ApB$. On prouvera de la même maniere que $sVy : rux :: MPN : mpn$. Or par la propriété du cercle $aVb = sVy$, & $aub = rux$. Par conséquent $APB : ApB :: MPN : mpn$. Donc, &c.

Par ce que nous venons de dire des propriétés principales des sections coniques par le moyen du cone, & desquelles on peut d'une maniere fort aisée déduire les autres par maniere de corollaires, sans en considérer davantage le solide, il est aisé de voir l'avantage que la considération du cone auroit au-dessus de celle dont nous sommes servis dans la premiere section, si ce n'étoit la difficulté qu'on a de se représenter dans l'imagination les différentes sections du cone.





LIVRE SECOND.

DES FLUXIONS.

SECTION I.

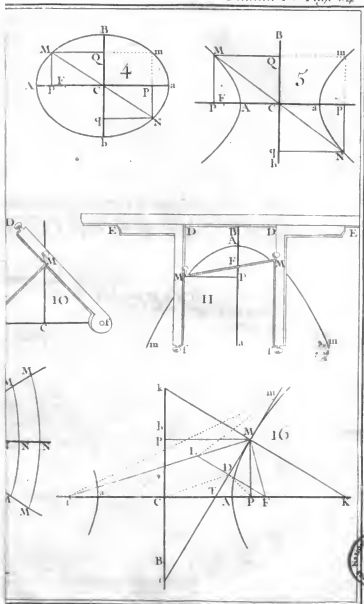
Comme il est nécessaire pour l'intelligence de ce qui suit ; de bien entendre les opérations des quantités algebriques qui ont des exposans généraux , on a donné quelques règles générales sur ce sujet , afin de ne rien omettre de ce qui pourroit être utile pour bien entendre les principes fondamentaux des Fluxions que l'on ne sçauroit se rendre trop familier.

RÈGLE PREMIÈRE.

Le produit de a^4 multiplié par a^1 est $a^{4+1} = a^5$; celui de $\frac{a^4}{a+x^3}$ par $\frac{a+x^3}{a+x^2}$ est $\frac{a^4}{a+x^2} = \frac{a^4}{a+x^2}$; celui de $\frac{a^4}{a+x^3}$ par $\frac{a^3}{a+x^2}$ est $\frac{a^{4+3}}{a+x^{2+1}} = \frac{a^7}{a+x^3}$. En général le produit de a^m multiplié par a^n est a^{m+n} ; celui de $\frac{a^m}{a+x^n}$ par $\frac{a+x^n}{a+x^m}$ est $\frac{a^m}{a+x^m}$; &c celui de $\frac{a^m}{a+x^n}$ par $\frac{a^n}{a+x^m}$ est $\frac{a^{m+n}}{a+x^{m+n}}$. Ce qui est évident par la composition des puissances , puisqu'en multipliant $\frac{a^m}{a+x^n}$ par $\frac{a+x^n}{a+x^m}$, on ne fait autre chose que d'augmenter l'exposant m de tant d'unités que l'exposant n en contient.

RÈGLE SECONDE.

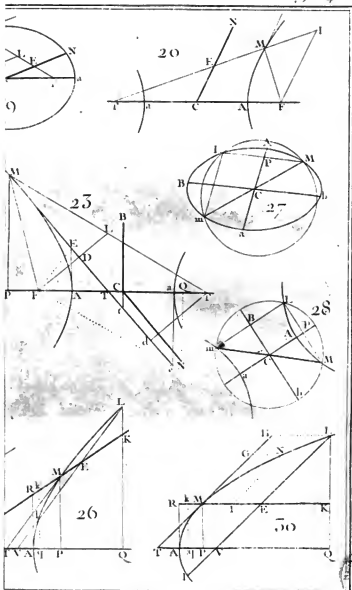
Le quotient a^4 divisé par a^1 est $a^{4-1} = a^3$; celui de $\frac{a^4}{a+x^3}$ divisé par $\frac{a+x^3}{a+x^2}$ est $\frac{a^4}{a+x^2} = \frac{a^4}{a+x^2}$. En général le quotient de a^m divisé par a^n est a^{m-n} ; celui de $\frac{a^m}{a+x^n}$ par $\frac{a+x^n}{a+x^m}$ est



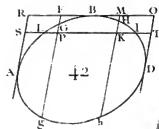
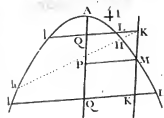
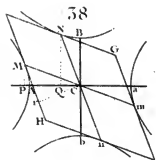
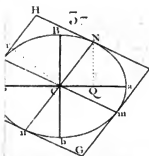
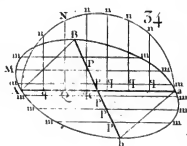
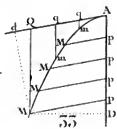
V. L.



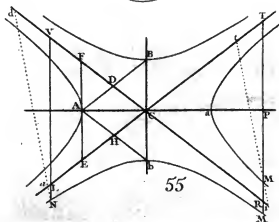
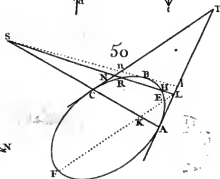
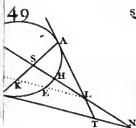
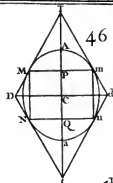
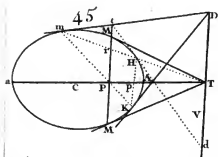




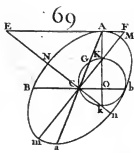
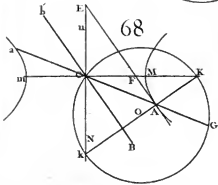
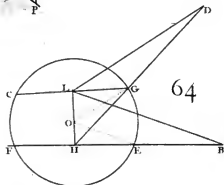
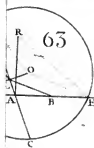
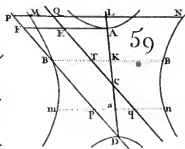
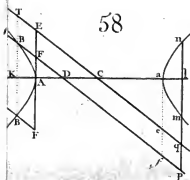




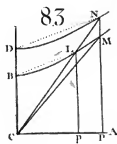
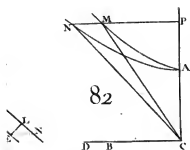
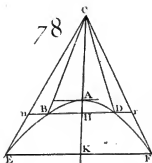
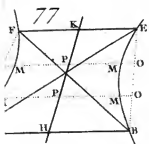
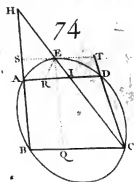
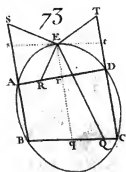






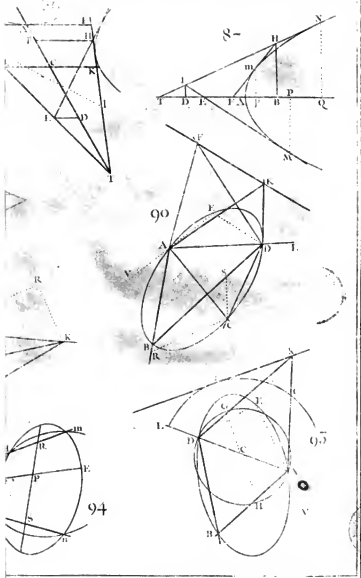




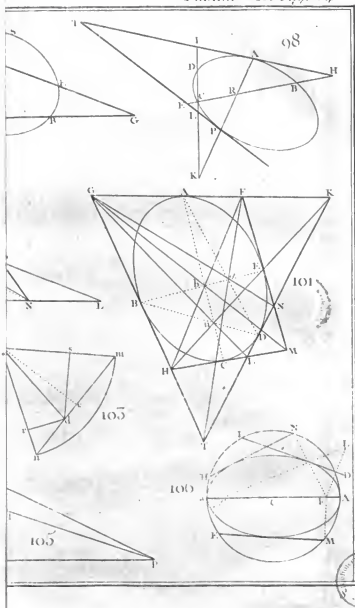


D.

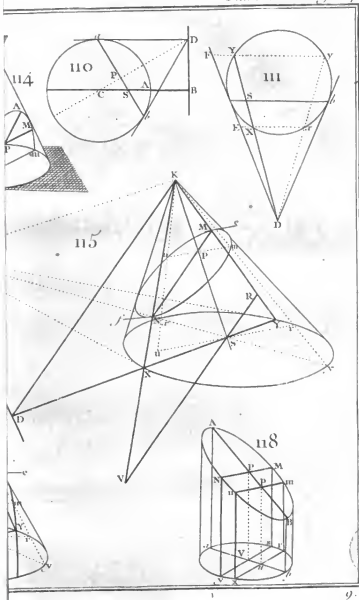














est $\frac{a+x^{m-n}}{a+x^n}$; enfin le quotient de $x^m \times \frac{a+x^{m-n}}{a+x^n}$ divisé par $x^n \times \frac{a+x^{m-n}}{a+x^n}$ est $x^{m-n} \times a+x^{m-n}$. Ce qui est l'inverse de la règle précédente.

REGLE TROISIEME.

De là on aura $\frac{1}{a} = a^{-1}$, & $\frac{1}{a+x} = a+x^{-1}$; car si l'on suppose $m=0$, a^{m-n} deviendra a^{-n} , de même $a+x^{m-n}$ deviendra $a+x^{-n}$. D'où il suit que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, & $\sqrt[n]{a+x} = x^{\frac{1}{n}}$; de même $\sqrt[n]{a+x} = a+x^{\frac{1}{n}}$, & en général $\sqrt[n]{a+x} = a+x^{\frac{1}{n}}$. Car en élevant chaque membre de l'équation $\sqrt[n]{a+x} = a+x^{\frac{1}{n}}$ à la puissance n , on aura $\sqrt[n]{a+x}^n = a+x^{\frac{1}{n}n}$, ou $a+x^1 = a+x$.

LEMME I.

158. Si l'on multiplie une suite $a^n + ba^{n-1} + bba^{n-2} + b^3a^{n-3} + \&c.$ formée par un binome $a+b$, dont l'exposant du premier terme a diminue, & celui du second b augmente chacun d'une unité dans chaque terme, par la différence $a-b$, le produit sera $= a^{n+1} - b^{n+1}$. Car on aura $a^{n+1} - ba^n + ba^n - bba^{n-1} + bba^{n-1} - b^3a^{n-2} + \&c.$

COROLLAIRE.

159. De là il suit que si l'on divise un binome tel que $a^n - b^n$, par la différence $a-b$ des termes, le quotient sera composé d'autant de termes positifs que l'exposant n contient d'unités, & le plus grand exposant du premier terme a , sera $n-1$. Par exemple $a^3 - b^3$ divisé par $a-b$, donnera $a^2 + ab + b^2$, & $a^4 - b^4$ divisé par $a-b$, donnera $a^3 + a^2b + abb + b^3$, & ainsi des autres.

LEMME II.

160. Si deux puissances dont le rapport & les directions sont exprimées par les côtés BA, DA d'un parallélogramme, agissent en même tems uniformément sur un point a sans pesanteur; je dis que ce point a parcourera par ce mouvement composé la diagonale CA prolongée.

Fig. 118. n. 1.

Car que l'on suppose que la ligne AL se meut le long de BA prolongée parallèlement à AD , avec une vitesse égale à celle que la puissance exprimée par BA imprimerait au point a si elle agissoit seule sur lui, & qu'en même tems ce point a s'avance dans AL avec une vitesse égale à celle que la puissance exprimée par DA lui imprimerait si elle agissoit seule. Cela posé, il est évident que le point a aura la même vitesse & suivra la même direction, dans cette supposition, que si les deux puissances agissoient en même tems sur lui. Mais lorsque la ligne AL aura parcouru la longueur AF , le point a sera avancé dans la ligne AL de F en G , en sorte que AF sera à FG , comme la force BA est à la force DA ou CB . Car les espaces parcourus dans le même tems sont comme les causes ou forces motrices. Donc les deux triangles CBA , AFG sont semblables; & BAF étant une même ligne droite, CAG sera aussi une même droite. Or comme cela arrive toujours, il s'ensuit que le point a parcourt la diagonale CA prolongée.

C O R O L L A I R E I.

161. Si la vitesse du point a dans la direction DA diminueoit lorsqu'il est arrivé en G , il est évident qu'au lieu de suivre sa première direction AG vers I , il en prendra une autre GH entre AI & AK . Car comme il parcoureroit l'espace KI avec la vitesse imprimée par DA , il parcourera un espace KH moindre par une vitesse moindre; & si la vitesse dans la direction DA diminueoit encore, lorsque le point a est arrivé en H , il est manifeste qu'il prendroit encore une autre direction HN qui seroit entre GH & AK .

Enfin si la vitesse dans la direction DA diminueoit continuellement en chaque instant, le point a décriroit une ligne courbe qui seroit concave vers AK .

C O R O L L A I R E II.

162. Tant que le rapport de deux puissances qui agissent en même tems sur un corps est constant, ce corps parcourra une ligne droite. Mais si ce rapport est variable, il parcourra un polygone ou une ligne courbe, selon que la variation est interrompue ou continue.

COROLLAIRE III.

163. Ayant la direction du corps & celles des deux puissances motrices dans une place donnée, on aura aussi le rapport des vitesses imprimées par ces puissances dans cette place, soit que ce rapport ait varié auparavant ou non. Car si la direction du point a , lorsqu'il est arrivé en G , est dans AG , il est évident qu'il continuera dans la même direction & avec la même vitesse avec laquelle il est arrivé en ce point, à moins que le rapport ne vienne à changer, & par conséquent les vitesses seront entr'elles comme les côtés du triangle AFG fait sur les directions des puissances motrices & sur celle du point a en G .

LEMME III.

164. Si deux puissances agissent par un mouvement continué *Fig. 119.* sur un point a , l'une constante & dans la direction AP , & l'autre variable & dans la direction AE , en sorte qu'il décrive la courbe AM : je dis que la vitesse avec laquelle ce point a arrive en une place M dans la direction AP , est à la vitesse dans la direction AE ou PM , comme la sous-tangente TP est à l'appliquée PM .

Si le point a continuoît à se mouvoir uniformément avec la vitesse avec laquelle il est arrivé en M , au lieu de continuer dans la courbe Mn , il décrira * la droite MN tangente en M . ** Art. 161.* Car si le mouvement dans la direction AE est retardé, la courbe sera concave * vers AP ; & si l'on tire les lignes Lp , Nq , de part & d'autre de PM , parallèles à AE , lesquelles rencontrent la courbe en m , n , la ligne MN en L , N , & la parallèle EM à AP en F & r ; cela posé, pendant que le point a se meut de F en M , & de M en r , dans la direction AP d'un mouvement uniforme, il passera de m en F , & de r en n dans la direction AE d'un mouvement retardé. Or comme la vitesse dans la direction AE est plus grande en m qu'en M , & moindre en n qu'en M , par supposition; l'espace mF sera plus grand, & nr moindre que les espaces LF , Nr , que le point a décriroit uniformément dans le même tems, avec la vitesse qu'il a en M . Or comme cela arrive toujours de quelque manière qu'on puisse tirer ces lignes de part & d'autre, il s'ensuit que la ligne TMN est située du même côté de la courbe AMn , & ne la rencontre qu'au seul point M ; & par conséquent elle est tangente en ce point.

I ij

Donc puisque la direction du point a en M est dans la tangente MT , il s'ensuit que sa vitesse dans la direction AP est à celle dans la direction AE , comme la soutangente TP est à l'appliquée PM .

C O R O L L A I R E.

165. Puisque le point a décrit la courbe AM par le mouvement composé, imprimé par les deux forces qui agissent selon les directions AE , AP , la vitesse en M dans la direction TM , peut être prise pour celle avec laquelle le point a décrivant la courbe, arrive en M . Car il est évident que tant plus ce mouvement composé est grand ou moindre dans des tems égaux, le point a décrira des parties de cette courbe qui seront aussi plus grandes ou moindres.

N. B. Quoique nous ayons supposé que la vitesse dans la direction AP est uniforme, elle peut néanmoins varier selon une loi quelconque, aussi bien que celle dans la direction AE , puisqu'on prouvera toujours la même chose que ci-dessus.

D E F I N I T I O N S.

1. La vitesse avec laquelle le point a arrive en M dans la direction AP , ou avec laquelle la ligne AE arrive dans la position PM , est appelée la *fluxion* de l'abscisse AP .

2. La vitesse avec laquelle ce point avançant dans la ligne AE ou PM , arrive en M , est nommée la *fluxion* de l'appliquée PM .

3. Et la vitesse en M dans la direction TM , est appelée la *fluxion* de la courbe AM .

4. En général la *fluxion* de toute quantité variable quelconque, est égale à la somme des produits des quantités génératrices, chacune multipliée par sa vitesse.

Et réciproquement ces quantités produites par ce mouvement, sont nommées les *Fluentes* de ces fluxions.

N. B. Nous exprimerons généralement dans la suite les quantités constantes par les premières lettres de l'alphabet, comme a, b, c, d, e , &c. les variables par les dernières, comme s, t, v, x, y, z , &c. & leurs fluxions par les mêmes lettres avec des points dessus, comme $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

PROBLEME I.

166. *Trouver la fluxion de yy .*

Si l'on suppose que la nature de la courbe AM soit telle qu'en faisant $AP = x$, $PM = y$, $x = yy$ soit son équation, laquelle est comme on voit à la parabole ordinaire dont le parametre est $= 1$. Or on a prouvé * que la sous-tangente TP, de la parabole est $= 2x$, ou $= 2yy$, à cause que $x = yy$. C'est pourquoi $TP (2yy) : PM (y) :: \dot{x} : \dot{y}$, ou $\dot{x} = 2y\dot{y}$; & par conséquent $2y\dot{y}$ est la fluxion demandée de yy . * Art. 232
* Art. 164

PROBLEME II.

167. *Trouver la fluxion de y^n .*

Soit $Ap = x$, $pm = y$, $Aq = u$, $qn = z$, & soit $x = y^n$ l'équation de la courbe AM: on aura aussi $u = z^n$, & $u - x = z^n - y^n = * z - y \times z^{\frac{n-1}{1}} + zy + yy$. Si à présent la ligne mn rencontre AP en t, on aura $qn - pm (z - y) : qp (u - x) :: pm : pt :: 1 : z^{\frac{n-1}{1}} + zy + yy$. Or si l'on suppose que les lignes pm, qn tombent sur PM, il est évident que tm tombera sur la tangente TM, & pt deviendra = PT. Donc puisqu'on a $y = z$ dans ce cas, la proportion ci-dessus se changera en la suivante PM : PT :: 1 : $zyy :: \dot{y} : \dot{x}$, ou $\dot{x} = 3yy\dot{y}$; & par conséquent $3yy\dot{y}$ sera la fluxion cherchée. * Art. 156
* Art. 164

En général soit proposé de trouver la fluxion de y^m .

La même chose étant supposée que ci-dessus, on aura $x = y^m$, $u = z^m$, & $u - x = z^m - y^m = z - y \times (z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2z^{m-3} + \&c.)$ continuée * à m termes: c'est pourquoi $pm : pt :: 1 : z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2z^{m-3} + \&c.$ Et lorsque la ligne mt devient la tangente MT, on aura $z = y$, & $my^{m-1} = * z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2z^{m-3} + \&c.$ Donc PM : PT :: 1 : $my^{m-1} :: \dot{y} : \dot{x}$, ou $\dot{x} = my^{m-1}\dot{y}$. Et par conséquent $my^{m-1}\dot{y}$ sera la fluxion demandée. * Art. 152
* Art. 152

COROLLAIRE I.

168. De là il suit que la fluxion de $d \frac{n}{z^n}$ est $\frac{n}{m} z^{\frac{n}{m}-1}$. Car si l'on suppose $\frac{n}{z^n} = x$, on aura $z^n = x^m$, dont la fluxion est $n z^{n-1} \dot{z}$.

$= m \dot{x} x^{m-1}$, ou $n \dot{z} z^{n-1} = m \dot{x} x^{m-1}$, parce que $z^n = x^m$, ou en multipliant le premier membre par $\frac{d}{m} z^{\frac{n}{m}}$, & le second par son égal $\frac{d}{m} x$, $\frac{n}{m} \dot{z} z^{\frac{n}{m}-1} = d \dot{x}$.

COROLLAIRE II.

169. La fluxion de $\overline{d \times e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}}$ sera $\frac{d}{p} f n \dot{z} z^{\frac{n}{p}-1} \times \overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}}$.

Car en supposant $\overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}} = x$, on aura $e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}} = x^p$, dont la fluxion est * $A f n \dot{z} z^{\frac{n}{p}-1} = p \dot{x} x^{p-1}$; mais comme $\overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}} = x$, & $e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}} = x^p$, on aura $\overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}} = x^{1-p}$; donc en multipliant le premier membre de l'équation A, par $\frac{d}{p} \times \overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}}$, & le second par son égal $\frac{d}{p} x^{1-p}$, on aura $\frac{d f n}{p} \dot{z} z^{\frac{n}{p}-1} \times \overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}} (= d \dot{x})$ pour la fluxion demandée.

On trouvera de la même manière que la fluxion de $d \times \overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}}$ est $\frac{d q f n}{p} \dot{z} z^{\frac{n}{p}-1} \times \overline{e + f \dot{z}^{\frac{n}{p}}}$.

P R O B L E M E I I I.

Fig. 120.

170. Trouver la fluxion de yz .

Soit A le sommet commun aux deux courbes AM, & AN, dont les propriétés soient telles que les rectangles $p m \times p n$, $q r \times q s$, soient toujours égaux aux abscisses correspondantes Ap, Aq, multipliées par quelque constante = 1. Donc si $Ap = x$, $p m = y$, $p n = z$, $A q = r$, $q r = u$, $q s = v$, on aura $x = y z$, $r = u v$, & $r - x = u v - y z$. Cette dernière égalité peut être changée en celle-ci: $1 = \frac{u+y}{z} \times \frac{v-z}{r-x} + \frac{v+z}{z} \times \frac{u-y}{r-x}$. Si à présent les lignes $r m$, $s n$ rencontrent le diamètre AP en t & u , on aura $q r - p m (u - y) : p q (r - x) :: p m (y) : p t$, ou $\frac{u-y}{r-x} = \frac{y}{p t}$; de même $\frac{v-z}{r-x} = \frac{z}{p u}$. En substituant ces valeurs dans la dernière équation, elle deviendra celle-ci: $1 = \frac{u+y}{z p u} + \frac{v+z}{z p t}$. Or si l'on suppose que les lignes $r t$, $s u$ tombent sur les tangentes MT, NV, on aura $y' = u$, $z' = v$, $p u = P V$, $p t = P T$; & par conséquent la dernière équation de-

viendra $\frac{y^2}{pV} + \frac{xy}{pT} = 1$, ou $y^2 + xy = x$, parce que $\frac{x}{pV} = 1$. *Art. 154.*

$$\frac{x}{p}, \& \frac{y}{pT} = \frac{y}{x}.$$

On peut prouver cela d'une autre manière plus simple ; car la fluxion de $y^2 + x^2$, est $y^2 + x^2$ selon ce qu'on vient de prouver, & comme la fluxion de $y + x$ est $y + x$, celle de $y + x^2$, sera $2y + 2x \times y + x^2$; car si l'on suppose $y + x = x$, la fluxion de cette égalité sera $y + x = x$, & en multipliant ces égalités ensemble & leurs produits par 2, on aura $2y + 2x \times y + x^2 = 2x^2$. Or $2x^2$ est la fluxion de x^2 égal à $y + x^2$; par conséquent $2y + 2x \times y + x^2$ est la fluxion de $y + x^2$, ou de $yy + 2yx + x^2$; mais si l'on soustrait la somme des fluxions $2yy + 2xz$ des carrés $yy + x^2$, de la fluxion $2yy + 2yz + 2xz + 2x^2$, de $y + x^2$, la différence $2yz + 2xz$ sera la fluxion de $2yz$, ou $y^2 + x^2$ celle de y^2 , comme auparavant.

En général soit proposé de trouver la fluxion de $y^m z^n$.

La même chose étant supposée comme ci-dessus, on aura $r - x = u^m v^n - y^m z^n$, ou $1 = \frac{u^m + y^m}{x} \times \frac{v^n - z^n}{r - x} + \frac{v^n + z^n}{x}$ *Art. 155.*

$\times \frac{u^m - y^m}{r - x}$. Mais $v^n - z^n = u - z \times (v^{n-1} + z v^{n-2} + z^2 v^{n-3} + \&c. \text{ continué à } n \text{ termes, } \& u^m - y^m = u - y \times (u^{m-1} + y u^{m-2} + y^2 u^{m-3} + \&c. \text{ continué à } m \text{ termes.})$

Donc $1 = \frac{u^m + y^m}{x} \times \frac{v^n - z^n}{r - x} \times (v^{n-1} + z v^{n-2} + z^2 v^{n-3} + \&c.) + \frac{v^n + z^n}{x} \times \frac{u^m - y^m}{r - x} \times (u^{m-1} + y u^{m-2} + y^2 u^{m-3} + \&c.)$

ou à cause que $\frac{v^n - z^n}{r - x} = \frac{z}{p u}$, & $\frac{u^m - y^m}{r - x} = \frac{y}{p v}$, cette dernière équation deviendra $1 = \frac{u^m + y^m}{x} \times \frac{z}{p u} \times (v^{n-1} + y v^{n-2} + \&c.) + \frac{v^n + z^n}{x} \times \frac{y}{p v} \times (u^{m-1} + y u^{m-2} + \&c.)$

Mais lorsque les lignes rt , su tombent sur les tangentes MT , NV , on aura $y = u$, $z = v$, $pu = PV$, $pt = PT$,

$\frac{x}{p} = \frac{z}{x}$, & $\frac{y}{p} = \frac{y}{x}$. Par conséquent la dernière équation deviendra $1 = y^m \times \frac{x}{z} \times n z^{n-1} + z^n \times \frac{y}{x} \times m y^{m-1}$, ou $x = n z y^m z^{n-1} + m y z^n y^{m-1}$.

C O R O L L A I R E I.

171. De là il suit que la fluxion de $d\zeta^{-\frac{n}{m}}$ est $-\frac{d}{m}\zeta^{-\frac{n}{m}-1}$.

Car si l'on suppose $x = \zeta^{-\frac{n}{m}}$, on aura $x^m = \zeta^{-n}$, ou $x^m \zeta^n = 1$, dont la fluxion est $* m \zeta^n x^{m-1} + n x^m \zeta^{n-1} = 0$, ou $m x^{m-1} + n \zeta^{-1} = 0$, (à cause que $x^m \zeta^n = 1$) : d'où l'on tire $x = -\frac{n}{m} x \zeta^{-1}$; ou en mettant la valeur $\zeta^{-\frac{n}{m}}$ de x , & en multipliant par d , $d x = -\frac{d}{m} \zeta^{-\frac{n}{m}-1}$ sera la fluxion demandée.

C O R O L L A I R E II.

172. La fluxion de $d\zeta^m \times e + f\zeta^{n^p}$, est $dm\zeta^{m-1} \times e + f\zeta^{n^p} + dpfn\zeta^{m+n-1} \times e + f\zeta^{n^p-1}$. Car en supposant $e + f\zeta^{n^p} = x$, on aura $\zeta^m \times e + f\zeta^{n^p} = x\zeta^m$, dont la fluxion du second membre $x\zeta^m$ sera $A x \zeta^m + m x \zeta^{m-1} \zeta$; & la fluxion de $e + f\zeta^{n^p} = x$, sera $pfn\zeta^{n-1} \times e + f\zeta^{n^p-1} = \dot{x}$; & par conséquent en substituant les valeurs de x & de $\dot{x}$ dans la fluxion A , & en multipliant par d , on aura $dm\zeta^{m-1} \times e + f\zeta^{n^p} + dpfn\zeta^{m+n-1} \times e + f\zeta^{n^p-1}$ pour la fluxion de $d x \zeta^m$; ou de son égal $d\zeta^m \times e + f\zeta^{n^p}$.

C O R O L L A I R E III.

173. La fluxion de $xy\zeta$ sera $\dot{x}y\zeta + y\dot{x}\zeta + \dot{\zeta}xy$. Car si $xy = u$, on aura $xy\zeta = u\zeta$, dont la fluxion du second membre $u\zeta$ sera $A u \zeta + \dot{\zeta}u$; & celle de $xy = u$, sera $\dot{x}y + y\dot{x} = \dot{u}$; & en substituant les valeurs de u & de $\dot{u}$ dans la fluxion A , elle deviendra $\dot{x}y\zeta + y\dot{x}\zeta + \dot{\zeta}xy$, qui étant la fluxion de $u\zeta$, elle sera aussi celle de son égale $xy\zeta$.

N. B. On auroit pû trouver la fluxion de $xy\zeta$ par l'article 170, en supposant autant de courbes qu'il y a de quantités variables; mais comme le grand nombre de courbes est trop embarrassant, on a mieux aimé se servir de la manière précédente.

Règles

Règles générales pour trouver les fluxions.

I. D'une quantité telle que z^m , élevée à une puissance quelconque m , positive ou négative, entière ou fractionnaire.

Multipliez l'exposant * par cette quantité, changez une de * ses dimensions en fluxion, & vous aurez la fluxion demandée $m z^{m-1}$. Art. 167.

II. D'un produit $z^n y^m$ de deux quantités élevées à des puissances quelconques.

Multipliez alternativement la fluxion de l'une par la quantité de * l'autre, la somme de ces produits $z^n \times m y^{m-1} + y^m \times n z^{n-1}$ fera la fluxion cherchée. Art. 170.

III. D'un binôme $e + f z^{n^p}$, élevé à une puissance quelconque.

Multipliez le produit de l'exposant du binôme par la fluxion de la quantité sous le signe par le binôme, après avoir diminué son exposant d'une unité, & le * produit $p \times f n z^{n^p-1} \times e + f z^{n^p-1}$ fera la fluxion cherchée. Art. 169.

IV. D'un produit $z^m \times e + f z^{n^p}$ d'une quantité quelconque multipliée par un binôme, l'un & l'autre élevés à une puissance quelconque.

Multipliez 1°. la fluxion de la quantité hors du signe par le binôme; 2°. la fluxion du binôme par la quantité hors du signe, & la somme de ces * produits $m z^{m-1} \times e + f z^{n^p} + z^m \times p f n z^{n^p-1} \times e + f z^{n^p-1}$ fera la fluxion demandée. Art. 171.

REMARQUE I.

On a trouvé la fluxion d'un yy par le moyen de la parabole ordinaire, & de là on a déduit la fluxion d'un rectangle yz dont les côtés sont variables: cela étant supposé, on peut trouver la fluxion d'une quantité élevée à une puissance quelconque, ou du produit de plusieurs quantités multipliées ensemble par le calcul ordinaire, sans avoir recours à des courbes ou autres principes, comme on va voir par quelques exemples.

Soit y' dont on veut trouver la fluxion; en supposant $yy = z$, ce qui donne $y' = y z$; & comme la fluxion de $yy = z$, est $2yy = z$, en mettant les valeurs de z & de z dans la fluxion $y z + y z$ du rectangle yz , qu'on a trouvée ci-dessus, on aura

K

$yy\dot{y} + 2y\dot{y}y$, ou $3yy\dot{y}$ pour la fluxion de $y\dot{z}$, ou de son égale y^3 ; puisque les quantités sont égales, leurs fluxions doivent être égales aussi.

Si l'on veut avoir la fluxion de y^4 , on supposera $y^3 = z$, dont la fluxion est $3yy\dot{y} = \dot{z}$, & $y^4 = yz$; en mettant la valeur de z & de $\dot{z}$ dans la fluxion $\dot{y}z + y\dot{z}$ du rectangle yz , on aura $\dot{y}y^3 + 3\dot{y}y^3$, ou $4\dot{y}y^3$ pour la fluxion de y^4 , ou de son égale y^4 .

De là il est aisé de voir que si n est un nombre entier & positif, que la fluxion de y^n est $n\dot{y}y^{n-1}$, c'est à-dire la fluxion d'une quantité élevée à une puissance quelconque entière & positive, est égale au produit de l'exposant de la fluxion de cette quantité, & de la quantité donnée dont l'exposant est diminué d'une unité.

La fluxion de yyz , en supposant $yy = x$, sera $2y\dot{y}z + yy\dot{z}$, par la méthode ci-dessus; & la fluxion de y^3z sera $3\dot{y}y^2z + zy^3$; & en général la fluxion de zy^n sera $\dot{z}y^n + n\dot{y}zy^{n-1}$; & celle de z^ny^m sera $n\dot{z}y^mz^{n-1} + m\dot{y}z^ny^{m-1}$.

De là on peut trouver la fluxion de $y^{\frac{n}{m}}$, dont l'exposant est une fraction positive; car si l'on suppose $y^{\frac{n}{m}} = x$, on aura $y^n = x^m$, dont la fluxion est $n\dot{y}y^{n-1} = m\dot{x}x^{m-1}$, ou en mettant la valeur de x & de x^m , il viendra $\frac{n}{m}\dot{y}y^{\frac{n}{m}-1} = \dot{x}$ pour la fluxion cherchée.

De même la fluxion de $y^{-\frac{n}{m}}$, dont l'exposant est négatif & fractionnaire, sera $-\frac{n}{m}\dot{y}y^{-\frac{n}{m}-1}$. Car si $y^{-\frac{n}{m}} = x^{-1}$, on aura $x = y^{\frac{n}{m}}$, comme ci-dessus.

R È G L E G É N É R A L E.

La fluxion d'une quantité telle que y^n , dont l'exposant est un nombre fini quelconque, entier ou rompu, positif ou négatif, sera $n\dot{y}y^{n-1}$.

R E M A R Q U E I I.

Fig. 119.

I. Puisqu'on a toujours $nq - mp : qp :: pm : pt$, & lorsque les appliquées pm , qn tombent sur PM , la ligne pt devient égale à la toutangente PT ; & cette toutangente étant à

l'appliquée P M, comme la fluxion de l'abscisse A P est à la fluxion de l'appliquée P M, il est évident que le rapport avec lequel les différences $nq - mp$, & qp deviennent nulles, est précisément égal à celui qui est entre les fluxions des coordonnées A P & P M. D'où l'on pourroit aisément déduire la méthode du Calcul différentiel de M. Leibnitz, aussi bien que celle des premières & dernières raisons du Chevalier Newton.

II. Quand nous disons, par exemple, que $m y y^m$ exprime la fluxion de y^m , cette expression ne seroit pas juste, si on ne sous-entendoit quelqu'autre fluxion; car nous ne connoissons les vitesses que par comparaison: c'est pourquoi le sens dans lequel on doit entendre les fluxions, est en imaginant la quantité proposée égale à quelque variable, comme x ; & on aura $x : y :: m y^m : 1$; & par conséquent on sous-entend toujours la fluxion x de la variable x que l'on suppose être égale à la quantité proposée.

III. Puisque dans l'application des fluxions l'on ne se sert que des rapports des vitesses avec lesquelles les quantités variables x, y, z , &c. sont supposées être engendrées dans le même tems; & comme on peut exprimer ces rapports par de telles lignes qui augmentent ou diminuent dans la même proportion que ces vitesses, il s'ensuit qu'on peut concevoir les vitesses avec lesquelles ces lignes sont décrites dans le même tems, comme les fluxions des premières x, y, z , &c. ou comme les fluxions secondes de x, y, z , &c. Et de même les vitesses avec lesquelles les lignes qui expriment les rapports des fluxions secondes sont décrites, comme les fluxions des fluxions secondes, ou comme les fluxions troisièmes de x, y, z , &c. & ainsi de suite à tant de degrés subordonnés de fluxions que ces rapports variés.

On marquera les fluxions secondes par deux points, comme $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, &c. & les troisièmes par trois, comme $\ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{z}}$, & ainsi du reste.

Pour éclaircir ce que nous venons de dire des fluxions secondes & troisièmes par un exemple; supposons que l'abscisse A P soit toujours à l'appliquée P M, comme le degré de vitesse exprimée par x est au degré de la vitesse contemporaine exprimée par y ; & soit le rapport de ces fluxions x, y exprimé par une équation quelconque, afin qu'on puisse décrire la courbe A M. Cela posé, la fluxion $\ddot{x}$ de x , ou la fluxion seconde de x , sera à la fluxion $\ddot{y}$ de y , ou la fluxion seconde de y , comme la sou-

K ij

tangente TP est à l'appliquée PM. C'est pourquoi si $\dot{x} = y^3$, on aura $TP = 3x = 3y^3$; & par conséquent $TP : PM :: 3y : y :: \dot{x} : \dot{y}$, ou $\dot{x} = 3y\dot{y}$. D'où l'on peut conclure *qu'il faut faire les mêmes raisonnemens & les mêmes calculs pour trouver les fluxions secondes, troisièmes, &c. que pour trouver les premières.*

Fig. 131.

IV. La maniere de trouver les fluxions étant connue ou supposée, il sera aisé de trouver les soutangentes TP des courbes, aussi bien que les subperpendiculaires PK, lorsque les appliquées PM sont perpendiculaires sur le diamètre AP. Car

* Art. 164.

puisque $\dot{y} : \dot{x} :: PM(y) : PT = \frac{2x}{x}$, & $TP : PM :: PM : PK = \frac{2y}{x}$, on n'a qu'à substituer au lieu de x , ou de y , sa valeur prise dans la fluxion de l'équation de la courbe, on aura des expressions pour ces lignes, qui ne renferment aucunes fluxions.

Mais si l'on suppose $\dot{y} = y$ dans l'expression de la soutangente, on aura $TP = \frac{2x}{y} = yx$. C'est pourquoi, si l'on prend la fluxion de l'abscisse comme à l'ordinaire, & qu'au lieu de celle de l'ordonnée, on multiplie seulement par son exposant, la fluxion de l'abscisse sera égale à la soutangente cherchée. Soit par exemple $x = y^m$ l'équation de la courbe, on aura $\dot{x} m y^m = m x = TP$. Si $a x y + y^3 = x^3 + b b x$ est l'équation, on aura $a x \dot{y} + a x y + 3 y^2 = 3 x x \dot{x} + b b \dot{x}$, & $TP = \frac{ax^2 + 3y^3}{3xx + bb - 77}$.



SECTION II.

De la maniere de trouver les plus grands & les moindres.

DEFINITION.

Soit la courbe $ME m$, dont les appliquées sont parallèles Fig. 121. 122.
Sentr'elles, telle que pendant que l'abscisse AP augmente continuellement, l'appliquée PM augmente aussi jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à un certain point D , & après diminuer continuellement; ou au contraire, si elle diminue continuellement jusqu'à un certain point & augmente ensuite, l'appliquée DE est appelée un *plus grand* ou un *moindre*.

COROLLAIRE.

174. De là il suit que si l'appliquée PM est exprimée par une Fig. 121. 123.
ou plusieurs quantités variables, telle que AP , & des constantes, il est évident 1°. que si pendant que AP augmente continuellement, PM commence de zero à augmenter aussi sans diminuer, ou commence de l'infini à diminuer sans augmenter, l'expression ne contiendra aucun plus grand ni moindre.

2°. Si PM commence depuis zero à augmenter pendant un certain tems, & diminue après cela continuellement, l'expression contiendra un plus grand DE ; & au contraire, si PM Fig. 122. 124.
commence de l'infini à diminuer pendant un certain tems, & ensuite augmente continuellement, l'expression contiendra un moindre.

3°. Enfin si PM commence depuis zero à augmenter pendant un certain tems jusqu'à ce qu'elle devienne DE , & après cela diminue jusqu'à ce qu'elle devienne FG , & ensuite augmente encore une fois, & ainsi alternativement, l'expression contiendra des plus grands & des moindres. Fig. 125.

La même chose arrive si PM commence de l'infini à diminuer pendant un certain tems, & après cela augmente & diminue alternativement. Fig. 126.

Dans le premier cas du nombre 3°. le premier DE sera un plus grand, le second FG un moindre, le troisième HI un

* Fig. 126.

plus grand, le quatrième K L un moindre, &c. Dans le deuxième cas, le premier * D E sera un moindre, le second F G un plus grand, le troisième H I un moindre; & ainsi de suite alternativement dans les deux cas, tant de fois que l'expression contiendra des plus grands & des moindres.

N. B. Ce que nous venons de dire est vrai dans tous les cas possibles, en observant seulement que le moindre entre deux plus grands devient quelquefois zero, & le plus grand entre deux moindres infini, ce qu'on peut toujours distinguer par la nature de l'expression.

P R O B L E M E G E N E R A L.

Fig. 121. 122. 175. *La nature de la courbe M E m étant donnée, trouver sa plus grande ou moindre appliquée; ou, ce qui est la même chose, une expression étant donnée, trouver ses plus grands & ses moindres.*

Il est évident que lorsque l'appliquée P M devient la plus grande ou la moindre D E, la tangente M T deviendra ou parallèle à l'abscisse A B, comme dans les figures 121, 122, ou parallèle à l'appliquée P M, comme dans les figures 123, 124. C'est pourquoi la fluxion de l'appliquée P M devient zero dans le premier cas, & infinie dans le second à l'égard de la fluxion de l'abscisse A P; par conséquent en supposant la valeur de la fluxion de l'appliquée égale à zero ou à l'infini, on trouvera une valeur pour A P, telle que D E soit un plus grand ou un moindre.

R E M A R Q U E S.

I. En supposant l'appliquée P M constante, on aura la même chose qu'en supposant sa fluxion égale à zero.

II. Si l'expression fluxionaire est une fraction, le numérateur étant fait égal à zero, donnera la valeur demandée de A P, lorsque la tangente M T est parallèle à A P; & au contraire le dénominateur étant fait égal à zero, donnera la valeur demandée de A P, lorsque la tangente est parallèle à P M, puisque la fluxion de l'appliquée sera $\frac{0}{\infty}$ dans le premier cas, & $\frac{\infty}{0}$ dans le second.

E X E M P L E I.

176. Diviser une ligne $AB = a$, de telle manière que le produit $AD^m \times DB^n = x^m \times a - x^n$ soit un plus grand. Fig. 117.

Soit $DE = y$, & $y = x^m \times \frac{a}{a-x} - x^n$, l'équation de la courbe AEB . La fluxion $* m \times x^{m-1} \times \frac{a}{a-x} - n \times x^m \times \frac{a}{a-x} - x^{n-1}$ * Reg. 4^e
étant supposée $= 0$, & divisée par $x^{m-1} \times \frac{a}{a-x} - x^{n-1}$, donnera $ma - mx - nx = 0$, ou $AD = x = \frac{am}{m+n}$.

Il est évident que si m & n sont des nombres positifs, y sera toujours un plus grand; car si $x = 0$, ou $= a$, y sera égal à zero. Donc $* y = DE$ sera un plus grand.

Mais si n est négatif & moindre que m , l'équation $x = \frac{ma}{m+n}$, * Art. 174. 2^e
donnera $x > a$, & par conséquent l'équation $y = x^m \times \frac{a}{a-x}$, deviendra alors $y = x^m \times x - a^{-n}$; & lorsque $x = a$, ou $= \infty$, y sera infini. Et par conséquent $DE = y$ * Art. 174. 3^e sera un moindre.

Dans ce dernier cas l'énoncé du problème sera ainsi: soit AB continuée en D , en sorte que $AD^m \times DB^n$ soit un moindre.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{4}{27}a^3 =$ à un plus grand.

Si $m = 2$, $n = 3$, on aura $x = \frac{1}{4}a$, & $y = \frac{108}{3125}a^5 =$ à un plus grand.

Si $m = 3$, $n = -2$, on aura $x = 3a$, & $y = \frac{17}{4}a =$ à un moindre.

E X E M P L E II.

177. Diviser une ligne a en trois parties $A = x$, $B = y$, $C = a - x - y$, telle que que le produit $M. x^m y^n \times a - x - y$ soit un plus grand.

La fluxion du produit M , en prenant y constante, sera $m \times y^n x^{m-1} \times a - x - y - r \times x^m y^n \times a - x - y^{r-1} = 0$, qui étant divisée par $x y^n x^{m-1} \times a - x - y^{r-1}$, donnera $ma - x - y - rx = 0$, ou $\frac{ma - my}{m+1} = x$. Cette valeur de x

étant substituée dans M, donnera $y^n \times a - y^{m+r}$, en omettant les quantités constantes; la fluxion de cette dernière quantité étant divisée par $y y^{n-1} \times a - y^{m+r-1}$, donnera $na - ny - my - ry = 0$, ou $y = \frac{na}{m+n+r}$. D'où en substituant cette valeur dans celle de x & de C, on trouvera $A = \frac{m^a}{m+n+r}$, $B = \frac{n^a}{m+n+r}$, $C = \frac{r^a}{m+n+r}$.

Si l'on veut diviser une ligne a en quatre parties $A = x$, $B = y$, $C = z$, $D = a - x - y - z$, telle que le produit $x^m y^n z^r$ $\times a - x - y - z$ soit un plus grand; on trouvera en faisant $m + n + r + s = u$, que $A = \frac{m^a}{u}$, $B = \frac{n^a}{u}$, $C = \frac{r^a}{u}$, $D = \frac{s^a}{u}$.

D'où l'on peut conclure en général que si l'on veut diviser une ligne a en tant de parties A, B, C, D, E , &c. que l'on voudra, telle que le produit de leurs puissances, dont les exposans soient m, n, r, s, t , &c. soit un plus grand, en nommant la somme des exposans u , on aura $A = \frac{m^a}{u}$, $B = \frac{n^a}{u}$, $C = \frac{r^a}{u}$, $D = \frac{s^a}{u}$, $E = \frac{t^a}{u}$, &c. Ce qui fait voir que ces parties sont entr'elles comme les exposans de leurs puissances.

Il faut remarquer en général que lorsqu'il y a plusieurs inconnues qui dépendent l'une de l'autre comme dans le dernier cas, il faut les supposer l'une après l'autre constantes, & mettre les valeurs qu'on a trouvées dans la première expression jusqu'à ce qu'il n'y en ait qu'une, & alors on trouve la quantité cherchée comme à l'ordinaire,

E X E M P L E I I I.

178. De tous les cylindres qu'on puisse inscrire dans une sphere; trouver le plus grand.

Fig. 118.

Soit AMa la moitié d'un grand cercle de la sphere; PM, pm deux appliquées égales; si $CA = Ca = a$, $CP = Cp = x$, il est évident que $Pp \times PM^1 = 2x \times a - xx$ sera comme ce cylindre. Donc la fluxion $2aax - 6xxx = 0$ donne $CP = x = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$.

Si de tous les cylindres qu'on peut inscrire dans une sphere, on veut avoir celui dont la surface convexe soit la plus grande, on aura $Pp \times PM = 2x \times \sqrt{aa - xx}$ pour le plus grand, dont

dont la fluxion $2x\sqrt{aa-xx} - \frac{2xx^2}{\sqrt{aa-xx}} = 0$ donne $CP = x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

E X E M P L E I V.

179. De tous les cones qu'on peut inscrire dans une sphere ; trouver le plus grand.

Il est évident que $Ap \times pm^2 = \overline{a+xx} \times \overline{aa-xx}$ fera comme ce cone : donc la fluxion $aa\dot{x} - xxx\dot{x} - 2ax\dot{x} - 2xx\dot{x} = 0$ donnera $CP = x = \frac{1}{2}a$.

Si de tous les cones qu'on peut inscrire dans une sphere on veut celui de la plus grande surface, on aura $Am \times pm = \sqrt{2aa+2ax} \times \sqrt{aa-xx}$ pour le plus grand, dont la fluxion $\frac{a\dot{x}\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{2aa+2ax}} - \frac{x\dot{x}\sqrt{2aa+2ax}}{\sqrt{aa-xx}} = 0$, donne $aa - 2ax - 3xx = 0$, ou $CP = x = \frac{1}{3}a$. Ce qui fait voir que ces deux cones sont égaux.

E X E M P L E V.

180. Entre tous les cones ou pyramides qui ont la même solidité, trouver celui de la moindre surface convexe.

Soit y le rayon de la base, x la hauteur, $y\sqrt{yy+xx}$ sera comme la surface, dont la fluxion $y\sqrt{yy+xx} + \frac{yy^2+xx^2}{\sqrt{yy+xx}} = 0$, donne $2yy\dot{y} + xx\dot{y} + x\dot{x}y = 0$. Or si a exprime la solidité donnée, on aura $a = xyy$, dont la fluxion $\dot{x}yy + 2y\dot{y}x = 0$, ou $\dot{x}y = -2\dot{y}x$, & cette valeur de $\dot{x}y$ étant substituée, donne $2yy = xx$. D'où l'on voit que le quarré du rayon de la base doit être double du quarré de la hauteur.

P R O B L E M E I.

181. Etant donné un corps dur p avec sa vitesse v , & celle u d'un corps indéterminé z , qui se rencontrent dans des directions directement opposées, l'on demande la plus grande force de z après le choc.

Soit x la vitesse commune après le choc, on aura par les loix du mouvement $xp + xz = pv - zu$, ou $x = \frac{pv - zu}{p + z}$;

L

ainsi $\gamma x = \frac{p v z - z z u}{p + z}$ sera la force du corps γ après le choc, dont la fluxion $\frac{p v z - z z u}{p + z} - \frac{p v z + z^2 u}{p + z} = 0$, donnera $p p v$

$- 2 p u \gamma - \gamma \gamma u = 0$; d'où l'on tire $\gamma = p \sqrt{\frac{v + u}{u}} - p$. Et en mettant cette valeur dans celle de x & de γx , on aura $x = \sqrt{v u + u u} - u$, & $\gamma x = p v + 2 p u - 2 p \sqrt{v u + u u}$.

Si l'on suppose que les corps vont du même côté, on aura $x \gamma = \frac{p v + z u}{p + z}$; d'où l'on voit qu'en changeant seulement le signe de u , on aura $\gamma = p \sqrt{\frac{u - v}{u}} - p$, $x = u - \sqrt{u u - v u}$, & $\gamma x = p v - 2 p u + 2 p \sqrt{u u - v u}$.

C O R O L L A I R E.

182. De là il suit que si les vitesses v & u sont égales, on aura lorsque les corps se meuvent dans des directions opposées, $\gamma = p \sqrt{2 - 1}$, $x = v \sqrt{2 - 1}$, & $\gamma x = p \times 3 v - 2 v \sqrt{2}$. Ce qui fait voir que si deux corps p & γ se choquent dans des directions opposées avec des vitesses égales, le plus grand p imprimera la plus grande force possible au plus petit γ , si $p : \gamma :: 1 : \sqrt{2} - 1$.

R E M A R Q U E.

Par le moyen de cet exemple on pourra donner la plus grande perfection qui soit possible aux machines qui servent à battre ou à enfoncer des corps. Car comme les vitesses sont comme les produits des longueurs des bras de leviers, ces leviers étant donnés, on pourra déterminer le rapport entre la force motrice p & le fardeau mû γ , par le moyen de l'équation $\gamma = p \sqrt{\frac{v + u}{u}} - p$; & au contraire le rapport entre la force motrice p & le fardeau γ étant donné, on pourra déterminer la vitesse ou le produit des longueurs des bras de leviers, par le moyen de la même équation. On pourra de même connoître le degré de perfection d'une machine déjà exécutée.

PROBLEME II.

183. Dans un triangle donné ABC , trouver un point O tel *Fig. 113. n. 1*
que la somme des lignes tirées de ce point aux points angulaires,
soit un moindre.

Concevez un arc de cercle EOF décrit du centre A par le point cherché O . Cela posé, si $BO = y$, $OC = z$, $AO = a$, on aura $a + y + z =$ à un moindre; donc $y = -z$. Ainsi si l'on prend la partie Ot de la tangente en O , pour la fluxion de l'arc de cercle, les parties Ob , Oc des lignes CO , BO , terminées par les lignes tb , tc tirées perpendiculaires sur CO & BO , exprimeront les fluxions $-z$, y , qui par conséquent sont égales, & par conséquent l'angle $bot =$ l'angle cot ; & ces angles étant ajoutés aux angles droits tOa , FOa , donneront l'angle AOB égal à l'angle AOC . On prouvera de la même manière en concevant un arc de cercle décrit du centre C par le point O , que les angles COA , COB sont égaux; par conséquent chacun des angles est de 120 degrés.

PROBLEME III.

184. Dans un quadrilatere donné $ABCD$, trouver un point *Fig. 113. n. 3.*
 O tel que la somme des lignes tirées de ce point aux quatre points
angulaires, soit un moindre.

Soit tu une tangente à l'ellipse décrite des foyers A , B , par le point cherché O , & dont le premier axe soit $= AO + OB$. Cela posé, puisque la somme des lignes AO , OB , est constante par construction, la fluxion de $DO + OC$ sera $= 0$; donc parce que nous avons dit dans le problème ci-dessus, les angles tOD , uOC doivent être égaux; & par la nature de l'ellipse les angles AOt , BOu sont aussi égaux, & par conséquent l'angle AOD est égal à l'angle BOC . On prouvera de la même manière que l'angle DOC est égal à l'angle AOB ; par conséquent les lignes DO , OB ne sont qu'une même ligne droite, aussi bien que AO & OC . D'où l'on voit que le point O est le point d'intersection des deux diagonales AC & BD .

On peut démontrer ceci d'une manière plus simple par la Géométrie ordinaire; car si l'on tire d'un point quelconque z pris dans la figure, des lignes aux angles A , B , C , D , il est clair que la ligne AC est plus courte que la somme des lignes tirées de A à z , & de C à z , de même la ligne BD est plus courte que la som-

me des lignes tirées des points B & D au point γ ; par conséquent la somme des diagonales AC, BD, est moindre que la somme des lignes tirées d'un point quelconque γ aux quatre angles.

P R O B L E M E I V.

185. *Trouver la plus grande superficie que deux droites AC, BC données avec une autre quelconque peuvent contenir.*

Fig. 128. n. 4.

Il est évident que le triangle ACB sera le plus grand, lorsque l'angle ACB que les deux droites données font entr'elles, est droit, puisqu'il sera toujours plus grand que tout autre triangle ACD, dont le côté CD est $=$ CB, & dont l'angle ACD est plus grand ou moindre qu'un droit.

P R O B L E M E V.

186. *Trouver la plus grande superficie qui puisse être contenue dans un nombre de lignes quelconques données & une indéterminée.*

Fig. 128. n. 5.

Je dis que si les droites AB, BC, CD, DE, EF, données sont inscrites dans un demi-cercle dont le diamètre AF soit l'indéterminée, elles contiendront la plus grande superficie possible.

Car nous venons de prouver que la plus grande superficie que deux droites données & une indéterminée puissent contenir, est lorsque ces droites font un angle droit entr'elles ; ainsi à moins que les angles ABF, ACF, ADF, AEF soient droits, ces triangles pourroient être augmentés sans changer le reste de la figure. Car si quelque angle comme C du triangle FCA, étoit plus grand ou moindre qu'un angle droit, ce triangle pourroit être augmenté, & ainsi toute la figure, en tournant le triangle ABC dans le plan de la figure autour du centre C ; car ni ce triangle, non plus que le trapeze CDEF, ne seroient par là diminués. Donc, &c.

P R O B L E M E VI.

Ce problème a été résolu le premier par M. Simpson.

187. *L'on demande la plus grande superficie qui puisse être terminée par quatre droites données.*

Même Fig.

Puisque la superficie ABCDEFA est la plus grande qui puisse être terminée par ces six droites, une de ses parties, comme ABCD, terminée par quatre droites, sera aussi la plus

grande qu'elles puissent contenir, autrement toute la figure pourroit être augmentée, ce qui est contraire à ce que nous avons prouvé. Par conséquent la plus grande superficie qui puisse être contenue par un nombre quelconque de droites données, est celle dont la figure est inscrite dans un cercle; par conséquent si le nombre de ces droites étoit infini, on les pourroit considérer comme la circonférence même. Ainsi le cercle est la plus grande figure de toutes celles qui sont terminées par des lignes de même longueur.

Si l'on tire AL , CN perpendiculaires sur CB , prolongée, & sur AD , & si $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BL = x$, on aura $a : x :: c : \frac{cx}{a} = DN$, parce que les angles ABL , ADC ont chacun pour mesure la moitié de l'arc ABC . Or le triangle ABC donne $\overline{AC}^2 = aa + bb + 2bx$, & le triangle ACD , donne $\overline{AC}^2 = cc + dd - \frac{2cdx}{a}$. D'où l'on tire $x = \frac{cc + dd - aa - bb}{2ab + 2cd} \times a$. Par le moyen de cette valeur de x , on peut déterminer la figure demandée.

De ce que nous venons de dire à l'égard de la manière de trouver les plus grands & les moindres, il sera aisé au lecteur de l'appliquer à d'autres exemples, selon qu'il en trouvera l'occasion; & comme nous donnons plusieurs problèmes sur ce sujet à la fin de ce Traité, nous n'insisterons pas davantage là-dessus.



SECTION III.

De la maniere de trouver les rayons des développées.

L E M M E I.

Fig. 119.

188. *SI une ligne droite CA tourne autour du centre C, en sorte que le point fixe A décrive un arc de cercle AM, pendant que le point mobile B décrit une courbe quelconque BN; je dis que les vitesses angulaires des points A, B, en M, N, dans des directions perpendiculaires sur CM, seront comme les rayons CM, CN.*

Soient MT, NV des tangentes en M & N, & Nu perpendiculaires sur CM. Cela posé, la vitesse du point N dans la direction de la tangente NV est équivalente aux vitesses dans les directions Vu, Nu, dont la première Vu est celle avec laquelle le point N avance ou recule du centre C dans la direction CB, & la seconde Nu, celle avec laquelle ce point tourne. C'est pourquoi, puisque MT parallèle à Nu exprime la vitesse angulaire du point A en M, on aura $CN : CM :: Nu : MT$.

A U T R E M E N T.

Soient MP, NQ perpendiculaires sur CA, & du point m pris à volonté dans la tangente VN, soient tirées mn, mr perpendiculaires sur QN, & CN prolongées; la première étant prolongée, rencontre CN en s: cela posé, si Nm exprime la fluxion de la courbe BN, — mn exprimera celle de CQ, * & Nn celle de QN; & enfin mr exprimera la vitesse angulaire du point N. Ainsi si $CQ = x$, $QN = y$, $CP = u$, $PM = z$, $CN = n$, $mr = q$, $CA = r$, on aura $Nn = j$, $mn = -\dot{x}$; & les triangles semblables CQN, Nns donneront $NQ(y) : CQ(x) :: Nn(j) : ns = \frac{xj}{y}$; ainsi $ns + nm = \frac{xj}{y} - \dot{x}$. Et les triangles semblables CQN, mrs donnent $CN(n) : QN(y) :: ms(\frac{xj}{y} - \dot{x}) : mr(q)$, ou $nq = xj - y\dot{x}$. Enfin les triangles semblables CQN, CPM donnent $CQ(x) : QN(y) ::$

* Art. 64.

$CP(u) : PM(\sqrt{rr - uu})$, ou $\frac{z}{x} = \frac{1}{u} \sqrt{rr - uu}$, dont la fluxion sera $\frac{\frac{1}{u} \sqrt{rr - uu}}{xx} = \frac{rr \dot{u}}{u u x}$, parce que $z = \sqrt{rr - uu}$. En mettant au lieu de $jx - xy$ la valeur nq , on aura $\frac{nq}{xx} = \frac{rr \dot{u}}{u u x}$, ou $\frac{q}{x} = \frac{rr \dot{u}}{u x}$, à cause que $n : x :: r : u$. Donc $CQ(x) : CP(u)$, ou $CN : CM :: q : \frac{r \dot{u}}{x}$. Or $PM(z) : CM(r) :: PT(\dot{u}) : TM = \frac{r \dot{u}}{x} =$ à la fluxion de l'arc AM . Donc, &c.

COROLLAIRE.

189. De là il suit que si le point C décrit la courbe CO dans le tems que le point B décrit la courbe BN , & A l'arc du cercle AM , & si OX est perpendiculaire, & Xt parallèle à CM , & la dernière rencontrant VN en u ; on aura $Xu : Xt$, ou $ON : OM ::$ la différence Vu entre les vitesses angulaires des points O & N est à la différence entre les vitesses angulaires Tt des points O & N . Fig. 130

N. B. On considérera toujours ci-après la vitesse d'un point quelconque d'une ligne qui se meut d'un mouvement angulaire dans une direction perpendiculaire à cette ligne, comme une *vitesse circulaire*, c'est-à-dire comme la vitesse de ce point, s'il décrivait un arc de cercle.

DEFINITION.

Si l'on conçoit qu'une courbe BDF , toujours concave vers le même côté, soit enveloppée par un fil $ABDF$, dont l'un des bouts étant fixé en F , l'autre A commence à se mouvoir depuis la position AB de la tangente en B , pour se desengager de la courbe BDF , ce point A décrira une courbe AMN . Cela posé, Fig. 131

La courbe BDF est appelée la *développée* de la courbe AMN ; & les parties BA , DM , FN du fil entre les points touchans B , D , F , & le point décrivant A , sont nommées les *rayons de la développée*, ou *rayons de la courbure*.

COROLLAIRE I.

190. Puisque $AB +$ l'arc $BD = DM$, & $AB +$ l'arc $BDF = FN$, il s'ensuit que la différence entre les rayons BA , DM , est toujours égale à l'arc BD de la développée,

terminé par les points touchans de ces rayons ; de même l'arc BDF est $= FN - BA$.

COROLLAIRE II.

191. Il est évident que chaque rayon DM de la développée, est perpendiculaire à la tangente MT , qui passe par le point décrivant M . Car si la direction de la force qui fait que le point A a décrit la courbe AMN , faisoit un angle obtus DMT avec DM , la partie DM du fil ne sera pas tendue, & ainsi le point M ne seroit pas dans la courbe ; & au contraire si l'angle DMT étoit aigu, il y auroit une partie de cette force détruite par la trop grande tension du fil ; & le point A ne décriroit la courbe qu'avec la partie de cette force qui agiroit dans une direction perpendiculaire à DM . Donc, &c.

COROLLAIRE III.

192. Puisque la même droite TM touchera le cercle décrit du centre D avec un rayon égal à DM , aussi bien que la courbe AM , il s'ensuit que la vitesse du point A en M dans la direction de la tangente, sera égale à celle avec laquelle ce point décriroit d'un mouvement uniforme un arc de cercle avec le rayon DM , dans le même tems que ce point décrit l'arc AM .

COROLLAIRE IV.

193. A cause que la courbure des cercles diminue en même proportion que les rayons augmentent, il s'ensuit que la courbure en M sera à celle en N comme le rayon FN de la développée est au rayon DM de la même. Par conséquent les courbures seront toujours réciproquement proportionnelles aux rayons des développées en ces points.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 131.

194. *La nature de la courbe AM étant donnée, trouver le rayon DM de la développée mené par un point donné M de la courbe.*

1. Soient les ordonnées parallèles entr'elles & perpendiculaires sur AP . Si la partie Mm de la tangente exprime la fluxion de l'arc AM , & Kk celle de la ligne AK , & que l'on tire Kn perpendiculaire, & kn parallèle à KM , en nommant $AP = x$,
 PM

$PM = y$, $PK = r$, $KM = c$, & $Kk = q\dot{x}$ (q est une indéterminée), les triangles semblables MPK , Knk donneront $Kn = \frac{2x}{c}$ pour la * vitesse circulaire du point K à l'égard du * Art. 122.
 rayon DK . Or comme $PM(y) : KM(c) :: TP : TM :: *$ * Art. 164.
 $\dot{x} : Mm = \frac{c\dot{x}}{y} =$ à la vitesse circulaire * du point M à l'égard * Art. 189.
 du rayon DM , il suit que $DM : DK :: \frac{c\dot{x}}{y} : \frac{2x}{c}$:: $cc : qyy$, & en divisant, $DM : KM(c) :: cc : cc - qyy$: d'où
 l'on tire A , $DM = \frac{c^2}{cc - qyy}$.

II. Si à présent les ordonnées ou rayons PM partent tous Fig. 133.
 du même point P , soient tirées PS & KP respectivement perpendiculaires sur la tangente MT & sur PM , & soit DM le rayon cherché de la développée. Si Mm exprime la fluxion de la courbe NM , Ss celle de PS , ou la vitesse circulaire du point S à l'égard du rayon MS , & $\dot{x}$ la vitesse circulaire du point M à l'égard du rayon PM , en nommant comme auparavant $PM = y$, $PK = r$, $KM = c$, $PS = v$, on aura $TM : PM :: *$ * Art. 64. 65.
 $Mm(\dot{z}) : \dot{y} :: PM(y) : MS = \frac{2y}{\dot{z}}$. Or à cause de l'angle droit DMs & constant, le mouvement angulaire des lignes DM , MS fera égal; on aura donc $DM : MS \left(\frac{2y}{\dot{z}}\right) :: \dot{z} : v$, ou $DM = \frac{2y}{\dot{z}}$. Or puisque $TM : TP :: * \dot{z} : \dot{x} :: PM(y) : PS = v$ * Art. 64. 65.
 $= \frac{2y}{\dot{z}}$, dont la fluxion est $\dot{v} = \frac{\dot{y}\dot{z} + y\dot{\dot{z}} - \dot{y}\dot{\dot{z}}}{\dot{z}^2}$. Par conséquent
 $DM = \frac{2y\dot{z}}{\dot{y}\dot{z} + y\dot{\dot{z}} - \dot{y}\dot{\dot{z}}}$, qui est une formule générale dans laquelle il n'y a aucune fluxion supposée constante. En supposant y égale à l'infini, on aura $DM = \frac{y\dot{z}}{\dot{y}\dot{z} - \dot{y}\dot{\dot{z}}}$, pour le cas où les ordonnées sont parallèles entr'elles.

COROLLAIRE I.

195. A cause des triangles semblables KPM , PMS , on a $KM(c) : PM(y) :: PM(y) : PS = v = \frac{2y}{\dot{z}}$, dont la fluxion sera en supposant $\dot{c} = \dot{y}$, $\dot{v} = \frac{2\dot{y}\dot{z} - 2y\dot{\dot{z}}}{\dot{z}^2}$. Donc B. $DM = \frac{2y}{\dot{z}} = \frac{cc}{2\dot{c} - \dot{c}}$ pour la figure 132, & C. $DM = \frac{cc}{c - \dot{c}}$ pour la figure 131. Car lorsque le point M tombe sur le sommet A , y sera $= 0$, & DM devient $= KM$ dans ce cas. M

2. Mais le triangle rectangle K P M donne $cc = rr + yy$: si $\dot{r} = s \dot{y}$, on aura $c \dot{t} \dot{y} = rs \dot{y} + y \dot{y}$, parce que $\dot{c} = t \dot{y}$, ou $\dot{c} = \frac{rs + y}{c}$. Cette valeur de $\dot{c}$ étant substituée dans B, C, donnera D, $DM = \left(\frac{c^3}{cc - rs - y} \right) = \frac{c^3}{cc + rr - rs}$, & E, $DM = \left(\frac{c^3}{cc - rs - y} \right) = \frac{c^3}{rr - rs}$.

C O R O L L A I R E I I.

Fig. 131, 132. 196. Si l'on tire du point D la ligne D E perpendiculaire sur P M, prolongée s'il le faut, on aura K M : D M :: P K : E D :: M P : M E. Les différentes valeurs qu'on trouvera des lignes E D, M E, par le moyen de cette proportion, & des différentes valeurs de D M, étant posées par ordre aussi bien que celles de D M, on aura :

Fig. 131. $DM = \frac{c^3}{cc - rs - y} = \frac{cc}{cc - rs} = \frac{c^3}{rr - rs} = \frac{y \dot{y}}{x \dot{x} - s \dot{y}} \quad Kk = x \dot{q}.$

I. $ME = \frac{ccy}{cc - rs - y} = \frac{cy}{cc - rs} = \frac{ccy}{rr - rs} \quad \dot{c} = t \dot{y}.$

$DE = \frac{ccr}{cc - rs - y} = \frac{cr}{cc - rs} = \frac{cr}{r - s} \quad r = \frac{yy}{x} \quad \dot{r} = s \dot{y}.$

Fig. 132. $DM = \frac{c^3}{cc + rr - rs} = \frac{cc}{cc - rs} = \frac{y \dot{y}}{x \dot{x} + s \dot{y} - s \dot{y}} = \frac{y \dot{y}}{x \dot{x}}.$

II. $ME = \frac{ccy}{cc + rr - rs} = \frac{cy}{cc - rs}.$

$DE = \frac{ccr}{cc + rr - rs} = \frac{cr}{cc - rs}. KM = c. PK = r, PS = u.$

2. Art. 180. $x + \dot{r} = q \dot{x}, \dot{r} = s \dot{y}, \dot{c} = t \dot{y}, \& * x r = y \dot{y}.$

Il ne s'agit plus que de déterminer une des quantités q, s , ou t , telle que l'on voudra, par le moyen de l'équation particulière de chaque courbe, pour avoir le rayon demandé de sa développée.

REMARQUES.

I. Comme on n'a trouvé qu'une seule valeur pour chaque rayon de la développée, il s'ensuit que chaque courbe ne peut avoir qu'une seule développée; & si la courbe est géométrique, sa développée le sera aussi, & de plus rectifiable; car on pourra toujours trouver dans ce cas une expression pour son rayon, dérivée de toutes fluxions ou indéterminées.

II. Lorsque le point M tombe sur le point A, ou lorsque y Fig. 131.
 $= 0$, on aura $DM = c = \frac{c^2}{r}$, ou $r = c$. Donc le rayon de la développée sera dans ce cas égal à la superperpendiculaire PK.
 Et lorsque $y = 0$, dans la figure 132, on aura $DM = \frac{c^3}{cc + rr}$
 $= \frac{1}{2}c$; ainsi $c = r$, & le rayon de la développée sera encore égal à la superperpendiculaire PK.

EXEMPLE I.

197. Soit AM la parabole dont $2px = yy$ est l'équation, Fig. 133:
 on aura $2p\dot{x} = 2y\dot{y}$, ou $p = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}} = r$. Donc $\dot{x} = 0$, & * Art. 195:
 $s = 0$. Ainsi * $DE = \frac{cc}{r, y} = \frac{cc}{r} = p + 2x$, parce que * Tab. I. n. 2.
 $cc = rr + yy = pp + 2px$. Lorsque le point M tombe en
 A, on aura $DM = AB = p$.

Pour trouver la nature de la développée BD, soit tirée DF
 (z) perpendiculaire sur AK: cela posé, on aura $AP + (ED)$
 $PF = p + 3x$, & $AF - AB = BF(u) = 3x$; de même
 $ED - PK = KF = 2x$. Par conséquent $PK(p) : PM(y)$
 $:: KF(2x) : DF = z = \frac{2x^2}{p}$, ou $pzz = \frac{4x^3}{p} = 8x^3$, &
 $u^3 = 27x^3 = \frac{8}{27} pzz$: donc $8u^3 = 27pzz$ fera l'équation
 cherchée, qui est celle de la seconde parabole cubique.

EXEMPLE II.

198. Soit MN une hyperbole équilatère, & $x = y$ son Fig. 134
 équation, à l'égard des asymptotes, dont la fluxion sera $\dot{x}y +$
 $x\dot{y} = 0$; ce qui donne $-\dot{y} = \frac{\dot{x}}{x} = r$, & ainsi $-3yy\dot{y}$
 $= \dot{x} = * s\dot{y}$, ou $-3yy = s$. C'est pourquoi * $DE \left(\frac{cc}{r, y} \right)$ * Tab. I.
 M ij

$= \frac{cc}{2r}$, parce que $-y^1 = r$. Par conséquent si $PF = \frac{1}{2} KT$, la droite FD perpendiculaire sur CP , déterminera le rayon DM demandé, puisque $\div PK : KM : KT$. La valeur négative $= \frac{cc}{2r}$ montre que le point M tombe entre les points D & K .

E X E M P L E I I I.

Fig. 133-134. 199. Soit $x = y^m$ l'équation, qui est celle de toutes les paraboles, si m est positive; ou de toutes les hyperboles, si m est négative, dont la fluxion $\dot{x} = m y^{m-1} \dot{y}$ donnera $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = r = \frac{1}{m} y^{1-m}$, & ainsi $\frac{1}{m} y^{1-m} \dot{y} y^{1-m} = \dot{r} = s \dot{y}$.⁴ Donc $s = 2 - m$
^{* Art. 195. n.} $\frac{1}{m} y^{1-m}$, & ainsi $\frac{1}{m} y^{1-m} \dot{y} y^{1-m} = \dot{r} = s \dot{y}$.⁴ Donc $s = 2 - m$
^{2.} $\frac{r}{y}$, parce que $r = \frac{1}{m} y^{1-m}$; c'est pourquoi * $DE \left(\frac{cc}{r-1} \right) = \frac{cc}{m-1+r}$. Par conséquent si $PF = \frac{1}{m-1+r} KT$, la droite FD perpendiculaire à PK , déterminera le rayon DM demandé de la développée.

E X E M P L E I V.

Fig. 135-136. 200. Soit la courbe AM une ellipse ou hyperbole dont l'équation est $\pm yy = p - puu$, l'axe étant $= 2$; on aura $PK = r = * pu$; donc $CK = u \mp pu$, & * $q u = u \mp p u$, ou
^{* Art. 10. n.} $q = 1 \mp p$; par conséquent * $DM = \frac{c^1}{cc - qj} = \frac{c^1}{cc - j \mp pj}$
^{2.} $q = 1 \mp p$; par conséquent * $DM = \frac{c^1}{cc - qj} = \frac{c^1}{cc - j \mp pj}$
^{3.} $\frac{c^1}{pp}$, parce que $cc - yy = rr = ppuu$, & $\pm ppy = pp - ppuu$; ce qui donne cette construction. Soit DM prise égale à la quatrième continue proportionnelle au demi-paramètre du premier axe & à la perpendiculaire KM , le point D sera dans la développée.
Fig. 135. Lorsque le point M tombe au sommet A , DM deviendra $= AB = r = pu = p$, parce que u sera alors $= 1$; & lorsque le point M tombe au sommet b du second axe de l'ellipse,
^{* Art. 19.} DM deviendra $= * \frac{2}{p} = \frac{b}{p}$; ou à cause que $bb = p \times 1$, $= \frac{1}{p}$ c'est-à-dire égale au paramètre du demi second axe.

A U T R E M E N T.

Fig. 135. n. 2. Soit la courbe AM une ellipse ou hyperbole, P un des foyers, on aura * $\frac{b^2}{\sqrt{2aj+jj}} = r$, dont la fluxion est $\frac{abj\dot{y}}{2aj+jj}$

$= \dot{v}$, & * $DM = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\frac{1}{2}ab + \dot{y}\dot{y}}{ab}$; ce qui donne cette construction. Soit prise dans le diamètre MC, la partie ME égale à la moitié de son paramètre, la perpendiculaire ED sur MC rencontrera la développée en D. Car si l'on tire Cr perpendiculaire à la tangente, on aura * $Cr = \frac{ab}{\sqrt{1.42 + \dot{y}\dot{y}}}$, & le diamètre conjugué de MC (n) sera * $= \sqrt{2.42 + \dot{y}\dot{y}}$; ainsi ME * $= \frac{1.42 + \dot{y}\dot{y}}{n}$; & à cause des parallèles Cr, DM, on a $Cr : CM(n) :: ME : MD = \frac{1.42 + \dot{y}\dot{y}}{ab}$.

EXEMPLE V.

201. Soit AM la logarithmique, dont la propriété est telle qu'en tirant une perpendiculaire MP sur l'asymptote FK & une tangente MT, la sous-tangente PT = 1, est toujours de même. C'est pourquoi $1 : y :: \dot{x} : \dot{y}$, ou $y \dot{x} = \dot{y}$; ainsi $r = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = yy$, & $\dot{r} = 2y\dot{y} = s\dot{y}$, * ou $s = 2y$; & par conséquent * DE ou $PF = \frac{cc}{r - sy} = \frac{cc}{r}$, à cause que $r = yy$.

EXEMPLE VI.

202. Soit PFM la spirale logarithmique, dont la nature est que l'angle TMP fait par la tangente & le rayon tiré du pôle P au point touchant est toujours donné.

Par le pôle P soit tirée TK perpendiculaire à PM; puisque les angles du triangle MPK sont donnés, le rapport entre les côtés PM & PK, sera aussi donné. C'est pourquoi, si $PK = r = my$, on aura * $\dot{r} = s\dot{y} = m\dot{y}$, ou $s = m$: donc * $DM = \frac{cc}{cc + rr - r\dot{y}} = c = MK$, (parce que $r = my$.)

Il est évident que la développée KP de MFP est une spirale semblable & égale à la première; car puisque les angles PKM, PMT sont égaux, & que PM étant à TM :: $\dot{y} : \dot{z}$, la spirale PFM sera égale en longueur à la tangente MT, aussi bien que la spirale KP l'est à la sienne. Donc, &c.

EXEMPLE VII.

203. Soit PFM une des spirales entre un nombre infini qui peuvent être formées dans le secteur circulaire PANB, &

dont la nature est que le rayon $\overline{PN^m}$ (1) est à sa partie $\overline{PM^m}$ (y^m) terminée par la spirale, comme l'arc $\overline{ANB}$ (a) est à sa partie $\overline{AN}$ (z) terminée par ce rayon.

Ainsi $a y^m = z$ sera l'équation de cette spirale : or le rayon $\overline{PM}$ (y) étant au rayon $\overline{PN}$ (1) comme la vitesse circulaire * $\dot{x}$ du point M est à la vitesse circulaire $\dot{z}$ du point N, on aura $y \dot{z} = \dot{x}$. Cette valeur étant substituée dans la fluxion $m a \dot{y} y^{m-1} = \dot{z}$ de l'équation ci-dessus, donnera $m a \dot{y} y^m = \dot{x}$. Donc P K

* Art. 188. $= r = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{m a} y^{1-m}$, & $\frac{1-m}{m a} \dot{y} y^m = \dot{r} = s \dot{y}$, * ou $s =$

* Tab. II. $\frac{1-m}{m a} y^m = \frac{1-m r}{y}$, & par conséquent * M E ($\frac{cc}{cc+rr-yy}$)
 $= \frac{cc}{yy+\frac{cc}{n-1}-rr}$, parce que $cc = rr + yy$; & par conséquent si

T P + m + 1 P K : T K :: P M : M E, la perpendiculaire E D sur P M déterminera le rayon D M demandé.

E X E M P L E V I I I.

Fig. 140.

204. Soit P F M B la spirale réciproque, dont la nature est que le produit d'un arc circulaire $\overline{AN}$ (z) décrit du pôle P comme centre, & terminé par le premier P A & tout autre rayon P N, multipliée par la partie P M (y) de ce rayon, terminée par la spirale, est toujours de même.

Soit l'arc A B, entre le premier rayon A P & la spirale = n , & $\overline{PN} = a$, on aura $y z = n a$ pour l'équation dont la fluxion est

* Art. 188. $-\dot{z} = \frac{n \dot{a}}{y}$. Or le rayon P M est au rayon P N, comme la vitesse circulaire * $\dot{x}$ du point M est à la vitesse circulaire $-\dot{z}$ du point N : donc $-\dot{z} = \frac{\dot{x}}{y} = \frac{n \dot{a}}{y}$, ou $y \dot{x} = n \dot{a}$; ainsi $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} =$

* Art. 195. n. $= r = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{n} \frac{\dot{a}}{\dot{a}}$, & * $\dot{r} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = s \dot{y}$, ou $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = s$. C'est pourquoi *

* Tab. II. M E ($\frac{cc}{cc+rr-yy}$) = $\frac{cc}{y}$, parce que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = r$, & $cc - rr = yy$.

Si l'on suppose dans l'article précédent $m = -1$, la valeur de M F $= \frac{cc}{yy+\frac{cc}{n-1}-rr}$, deviendra aussi $= \frac{cc}{y}$, & l'équation $a \dot{y} y^m = \dot{x}$, deviendra $a \dot{y} = y \dot{x}$, qui est celle de la spirale réciproque.

SECTION IV.

De la maniere de trouver les caustiques par réfraction
& par réflexion.

DEFINITION.

SI les directions d'un nombre infini de rayons, tel que FA , *Fig. 143. 142.*
 FM , qui partent tous d'un même point lumineux F , se
changent par la rencontre d'une courbe AMN , en s'approchant
ou en s'éloignant de la perpendiculaire DM sur la courbe, de
telle maniere que le sinus DE de l'angle de l'incidence DME
soit au sinus DB de l'angle de réfraction DMB dans la raison
donnée de m à n ; la courbe KLH , que tous ces rayons tou-
chent, ou leurs prolongemens AH , ML , est nommée la *caus-
tique par réfraction.*

COROLLAIRE.

205. Soit la caustique HLK la développée de la courbe *Fig. 141.*
 AQ , & du point F comme centre soit décrit l'arc de cercle
 AP , le rayon QL , plus la partie LH de la caustique, sera tou-
jours $\ast = AH$; & si la partie Mm de la tangente en M ex-
prime la fluxion de la courbe AM , & que Mf , Mg soient per-
pendiculaires, & mf , mg paralleles aux rayons d'incidence
 FM , & de réfraction ML , fm exprimera la fluxion de PM
 $= FM - FA$, & mg la fluxion de QM , $= AH - ML$
 $- LH$. Or à cause des triangles semblables Mfm , MED ,
& Mgm , MBD , on a $fm : DE :: Mm : DM$, & $gm : DB ::$
 $Mm : DM$; *ex aquo*, $fm : gm :: m : n :: DE : DB$. Par
conséquent ces fluxions étant dans un rapport constant, les flu-
entes seront aussi dans le même rapport, c'est-à-dire $\frac{n}{m} PM =$
 $QM = AH - LH - LM$: d'où l'on tire $HL = AH -$
 $LM - \frac{n}{m} PM$.

Il y a plusieurs cas, selon que le rayon d'incidence FA est *Fig. 142.*
plus grand ou moindre que FM , & le rayon de réfraction AH s'en-

veloppe autour, ou se développe de la courbe HL; mais on prouvera toujours que la différence entre les rayons d'incidence est toujours à la différence entre les rayons de réfraction plus la partie de la caustique entre ces rayons, comme m est à n .

Si l'on suppose que la distance entre le point lumineux F & la courbe AM soit infinie, les rayons FA, FM seront parallèles; on aura toujours $LH = A'H - ML = \frac{n}{m} PM$; & l'arc AP deviendra une droite dans ce cas.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 141. 206. La nature de la courbe AM & le point lumineux F étant donnés, déterminer la longueur du rayon de réfraction ML tiré par un point donné.

Soit DM le rayon de la développée, & $ME = a$, $MB = b$, $FM = y$, $Mf = x$, on aura à cause de la ressemblance des triangles, $ME(a) : MB(b) :: Mf(x) : Mg = \frac{bx}{a}$, & le rayon $FM(y)$ fera au rayon FE ($y + a$), comme la vitesse * circulaire $Mf(x)$ du point M est à la vitesse circulaire $Ee = \frac{xy + xa}{y}$, ou fluxion de DE, laquelle est à la fluxion Bb de DB, comme m est à n , c'est-à-dire $Bb = \frac{nx + nax}{my}$. Or le rayon

* Art. 188.

LM est au rayon LB comme la vitesse circulaire $Mg(\frac{bx}{a})$ du point M est à la vitesse circulaire Bb du point B; & en divisant, $LM : BM(b) :: \frac{bx}{a} : \frac{bx}{a} - \frac{nx + nax}{y}$; d'où l'on tire $LM = \frac{bmy}{bm - an - nax}$. Ce qui donne cette construction.

Fig. 143.

Soit fait l'angle EDC égal à l'angle BDM, & soit pris dans le rayon d'incidence FM la partie $MK = \frac{aa}{y}$, cela posé, si $CK : CE :: MB : ML$, le point L sera dans la caustique par réfraction. Car à cause de la ressemblance des triangles DB : DE :: $n : m :: MB : CE = \frac{bm}{n}$; ainsi $CE - ME = CM = \frac{bm - an}{n}$, & $CM - MK = CK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; par conséquent $CK : CE :: MB : LM$, puisque $CK \times LM = CE \times MB$.

Lorsque $CK(\frac{bmy - any - aan}{ny})$ est négatif, le rayon
LM

L M le sera aussi ; d'où il suit que si le point M tombe entre les points B & L, le point C tombera entre les points K & E.

Si le point lumineux F est du côté de E, ou, ce qui est la même chose, si la courbe A M est concave vers le point F, alors y changera de positive en négative, & par conséquent $L M = \frac{b b m y}{b m y - a n y + a a n}$, & la construction demeurera la même.

Si l'on suppose y infinie, c'est-à-dire que les rayons d'incidence F M, F A soient parallèles, on aura $L M = \frac{b b m}{b m - a n}$, parce que le terme $a a n$ deviendra $= 0$, à l'égard des autres où y se trouve : or comme $M K = \frac{a a}{y}$, & devient $= 0$, dans ce cas on n'a qu'à faire $C M : C E :: M B : L M$, pour avoir le rayon demandé.

Si la courbe A M devenoit une droite, le rayon D M de la développée deviendroit infinie, aussi bien que M E (a), & M B (b), & par conséquent L M sera alors $= \frac{b b m y}{a a n}$, car les termes $b m y$, $a n y$ seront zero à l'égard de $a a n$. C'est pourquoi en faisant $C K = \frac{a a}{y}$, le reste de la construction demeurera la même.

COROLLAIRE.

207. Si le point E tombe de l'autre côté de D M à l'égard du point B, & que $D E = D B$, on aura $m = n$, & $L M = \frac{a y}{1 y + a}$, parce que a sera ici négative & égale b . La courbe L H est alors nommée la *caustique par réflexion*. Fig. 143

Si y devient infinie, c'est-à-dire si les rayons d'incidence F M sont parallèles entr'eux, on aura $L M = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} M E$, à cause que a est $= 0$ par rapport à y . D'où il suit que si deux points de ces trois F, D, L sont donnés, le troisième pourra être déterminé.

EXEMPLE I.

208. Soit la courbe A M la parabole ordinaire, & le point lumineux F son foyer, il est manifeste que les rayons réfléchis L M seront tous parallèles à l'axe A F ; c'est pourquoi L M $(\frac{a y}{1 y + a})$ sera infinie dans ce cas, & ainsi $a = 2 y$. Par con-

N

séquent si $ME = 2 MF$, la perpendiculaire ED à ME déterminera le rayon DM de la développée.

E X E M P L E I I.

Fig. 145.

209. Soit la courbe AM une ellipse, & le point lumineux F un de ses foyers, les rayons de réflexion LM passeront tous par l'autre foyer f . C'est pourquoi si $Mf = \tau = \frac{ay}{2y-a}$, on

Fig. 146.

aura $ME = a = \frac{2y^2}{y+z}$. Mais si la courbe AM est une hyperbole, & le point lumineux F son foyer, alors les rayons LM prolongés de l'autre côté de la courbe, passeront par l'autre foyer f ; c'est pourquoi τ sera ici négative, c'est-à-dire $-\tau = \frac{ay}{2y-a}$, ou $ME = a = \frac{2y^2}{y-z}$. Par conséquent si l'on prend dans

* Art. 14.

les deux cas ME , une quatrième proportionnelle à la moitié du premier axe $* Aa(y \pm \tau)$, & aux rayons d'incidence $FM(y)$, & de réflexion $Mf(\tau)$, la perpendiculaire ED à ME , déterminera le rayon DM de la développée.

Fig. 144-145-146.

Il est évident que la ligne tirée du point K perpendiculaire sur MK , rencontrera ME au point cherché E ; car si vous imaginez une ligne Ka tirée du point K perpendiculaire sur MF ,

* Art. 31.

on aura $* Ma = p$, & $MK = \frac{b}{a} \sqrt{y\tau}$: donc à cause des triangles rectangles semblables MaK , MKE , on aura $Ma(p = \frac{b^2}{a}) : MK(\frac{b}{a} \sqrt{y\tau}) :: MK(\frac{b}{a} \sqrt{y\tau}) : ME = \frac{y^2}{a} = \frac{2y^2}{y \pm z}$.

P R O B L E M E.

Fig. 147.

210. Etant donnée la courbe HL & le point lumineux F , trouver la courbe AM , dont HL soit la caustique par réflexion.

Du point lumineux F soit tirée la tangente FH à HL ; dans laquelle soit pris le point A pour un de ceux de la courbe cherchée, & dans toute autre tangente comme LM à HL soit pris $LK = \frac{n}{m} FA + AH - LH$; & si après avoir joint les points F, K , on fait $Km = n$, $mf = m$, la ligne FM tirée parallèle à fm , rencontrera LM dans un point M de la courbe cherchée. Car $Km(n) : mf(m) :: KM : FM$, ou $KM =$

$\frac{n}{m}$ FM; ainsi $(KM + LM) = \frac{n}{m} FM + LM = LK$, $= \frac{n}{m} FA + AH - LH$, par hypothèse. Donc $(\frac{n}{m} FM - \frac{n}{m} FA) = \frac{n}{m} FM = AH - LH - LM$; par conséquent * la cour- * Art. 105.
be A M décrite ainsi, sera la courbe demandée.

Si les rayons d'incidence FM sont parallèles entr'eux, il faut prendre $LK = AH - LH$, $Km = n$, & du point m tirer la ligne mf parallèle à AH & $= m$; & du point de rencontre P, de la ligne Kf, & de la perpendiculaire AP sur AH, la ligne PM, parallèle à AH, dont son intersection M avec LM sera dans la courbe demandée. Car $mf(m) : Km(n) :: PM : KM = \frac{n}{m} PM$, & $(KM + LM) = LK = \frac{n}{m} PM + LM = AH - LH$, par hypothèse, ou $\frac{n}{m} PM = AH - LH - LM$.

COROLLAIRE.

211. Il est évident que la courbe A M change sa figure selon Fig. 147-148.
que le point A est pris plus proche ou plus loin du point lumineux F, parce que la valeur de LK change. Par conséquent la même courbe H L peut être la caustique par réfraction à un nombre infini de courbes.

PROBLEME.

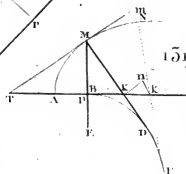
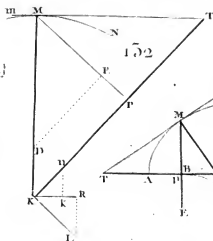
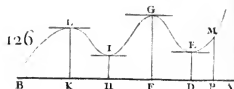
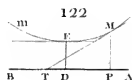
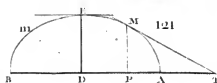
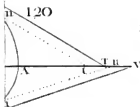
212. La courbe A M & le point lumineux F étant donnés, Fig. 149.
trouver une autre courbe B N, telle qu'elle fasse que les rayons de réfraction M N passent tous par un point donné D dans la tangente H A qui passe par le point lumineux F.

Il est évident que si l'on considère le point D comme le point lumineux de la courbe B N, dont D N soient les rayons d'incidence, & dont les rayons de réfraction tombent sur les rayons de réfraction N M de la courbe A M, la courbe H L sera la caustique par réfraction à toutes les deux. Donc si des points F, D, comme centres, on décrit les arcs circulaires AP, BQ, on aura $\frac{n}{m} PM = AH - LH - LM$, & $\frac{n}{m} QN = BH - LH - LN$; la différence de ces deux équations sera $\frac{n}{m} PM - \frac{n}{m} QN = AB - MN$, parce que $AH - BH = AB$, & $LM - N ij$

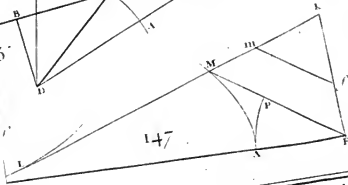
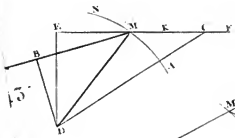
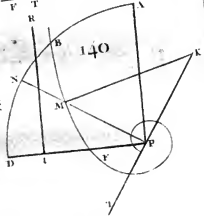
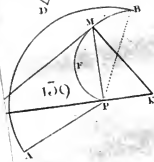
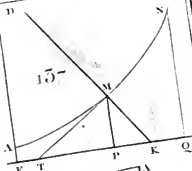
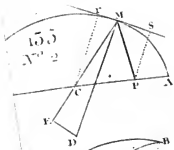
$LN = MN$. C'est pourquoi si de l'autre côté du point M à l'égard du point N on prend $MK = \frac{n}{m} BD - AB + \frac{n}{m} PM$, & que l'on trouve le point N par le problème précédent, tel que NK soit $= \frac{n}{m} ND$, il sera un point de la courbe demandée. Car $(NK - MN)(MK) = \frac{n}{m} ND - MN = \frac{n}{m} BD - AB + \frac{n}{m} PM$, ou $\frac{n}{m} PM - \frac{n}{m} QN = AB - MN$, puisque $ND - BD = QN$.

Si les rayons d'incidence FM de la courbe donnée AM étoient parallèles entr'eux, la construction seroit la même; & si les rayons d'incidence DN de la courbe demandée devoient être parallèles au lieu de se réunir dans un point, il faudra prendre $MK = \frac{n}{m} PM - AB$, & $NK = \frac{n}{m} NQ$, le point N sera dans la courbe demandée. Car $(NK - NM)(MK) = \frac{n}{m} NQ - NM = \frac{n}{m} PM - AB$, ou $\frac{n}{m} PM - \frac{n}{m} NQ = AB - NM$. Si la valeur de MK étoit négative, il faudroit prendre le point K du même côté du point M que le point N .











LIVRE TROISIÈME.

DES FLUENTES.

SECTION I.

LA méthode par laquelle on trouve les fluentes est d'une étendue si vaste, que si on vouloit entreprendre d'en expliquer tous les différens cas, un volume entier ne suffiroit pas. C'est pourquoi on a cru n'en devoir donner d'abord que quelques règles aussi générales que le sujet le permet, afin de ne point ennuyer le lecteur par la trop grande multiplicité, en réservant une explication plus ample pour la fin de ce Traité; & pour une plus grande facilité de résoudre les questions, on a donné des Tables contenant les fluentes les plus nécessaires, par le moyen desquelles on peut distinguer d'un coup d'œil si la fluente d'une fluxion qui peut être comparée avec quelques-unes des formules qui y sont contenues, peut être trouvée en un nombre fini de termes, ou si elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques, ce qui est d'une grande utilité dans la solution des problèmes.

Ensuite pour faire voir l'utilité & l'étendue de ces règles, on les applique à la rectification des lignes courbes, à la mesure des superficies, surfaces & solides des figures, à trouver leur centre de gravité, d'oscillation & de percussion, dont on donne auparavant des formules générales des fluxions de chacune, lesquelles on tâche de démontrer d'une manière claire & évidente, afin de ne rien laisser à deviner au lecteur.

Or comme la méthode par laquelle on trouve les fluentes est l'inverse de celle par laquelle on trouve les fluxions, il s'ensuit que la fluente de $d z z^m$ est $\frac{d}{m+1} z^{m+1}$; celle de $d z z^{n-1} x$

$e + f z^m$ est $\frac{d}{f^{n,m+1}} \times e + f z^{m+1}$, & celle de $m z^n y^{m-1} + n y^m z z^{n-1}$ est $y^m z^n$. Car si l'on prend les fluxions de ces fluentes, on trouvera précisément les mêmes que celles ci-dessus. D'où l'on déduit les règles suivantes.

Règles générales pour trouver les fluentes.

I. D'une quantité $d z z^n$, dont l'exposant n est un nombre quelconque.

Ajoutez l'unité à l'exposant n , & divisez la fluxion par le produit $1 + n$, & de cet exposant ainsi augmenté, multiplié par la fluxion z , le quotient $\frac{d}{1+n} z^{n+1}$ sera la fluente cherchée.

II. D'une quantité $d z z^{n-1} \times e + f z^m$, dont la partie $d z z^{n-1}$ hors du signe, est égale à la fluxion, ou dans un rapport donné, avec la fluxion de la quantité sous le signe.

Ajoutez l'unité à l'exposant m du signe, & divisez la fluxion par le produit de cet exposant ainsi augmenté, multiplié par la fluxion $n f z z^{n-1}$ de la quantité sous le signe, le quotient $\frac{d}{1+m, n f} \times e + f z^m$ sera la fluente demandée.

E X E M P L E.

213. La fluente de $x \sqrt{x} = x x^{\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
 $\frac{1}{3} x \sqrt{x}$; celle de $\frac{x}{\sqrt{x}} = x x^{-\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} = 2 x^{\frac{1}{2}}$
 $= 2 \sqrt{x}$; & celle de $a a x + b x x + x x x$ sera $a a x + \frac{1}{2} b x x + \frac{1}{3} x^3$. Ce qui est évident par la première règle.

La fluente de $x x \sqrt{a a + x x} = x x \times a a + x x^{\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{\frac{1}{2}+1, 2} \times a a + x x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} \times a a + x x^{\frac{3}{2}}$; celle de $\sqrt{a a - x x}$ sera $-\frac{1}{-\frac{1}{2}+1, 2} \times a a - x x^{-\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3} \times a a - x x^{\frac{1}{2}}$
 $= -\frac{1}{3} a a - x x$; & celle de $x x \sqrt[3]{a a + x x} = x x \times a a + x x^{\frac{2}{3}}$ sera $\frac{1}{\frac{2}{3}+1, 2} \times a a + x x^{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{5} \times a a + x x^{\frac{5}{3}}$. Ce qui est évident par la seconde règle.

N. B. A cause que les quantités constantes n'ont point de flux

xions, il arrive quelquefois qu'on est obligé d'ajouter ou de retrancher quelque quantité constante pour rendre la fluente complète. Mais comme on ne peut déterminer cette constante d'une manière générale, parce que sa grandeur dépend de la nature du sujet, on tâchera d'éclaircir la manière de la déterminer dans les problèmes qu'on donnera dans la suite.

LEMME I.

214. Si deux suites infinies telles que $a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.$ $l + mz + nz^2 + pz^3 + \&c.$ sont égales entr'elles, les coefficients des termes correspondans seront aussi égaux; savoir $a = l$, $b = m$, $c = n$, $d = p$, $\&c.$

Car il est clair que ces suites seront toujours égales, telle valeur qu'on puisse mettre au lieu de z : donc en supposant $z = 0$, on aura $a = l$; & en retranchant ces quantités égales, & divisant le reste par z , on aura $b + cz + dz^2 + \&c. = m + n z + p z^2 + \&c.$ Or dans le cas de $z = 0$, on aura aussi $b = m$; & par conséquent par la même manière de raisonner, on prouvera que $c = n$, & $d = p$, $\&c.$

PROBLEME I.

215. Elever un binome $1 + z$ à une puissance quelconque m ; ou, ce qui est la même chose, trouver une suite infinie égale à $\overline{1+z}^m$.

Il est évident que le premier terme de la suite cherchée doit être égal au premier terme du binome élevé à la puissance m ; car lorsque $z = 0$, on aura $\overline{1+z}^m = 1^m$. Ainsi supposant l'égalité A, les résultats des opérations de calcul seront les suivans.

$$A. \overline{1+z}^m = 1 + A z^p + B z^q + C z^r + D z^s + \&c..$$

$$B. \frac{m \times 1 + z}{1+z} = A p z^{p-1} + B q z^{q-1} + C r z^{r-1} + D s z^{s-1} + \&c..$$

$$C. \overline{1+z}^m = \frac{1}{m} A z^p + \frac{1}{m} B z^q + \frac{1}{m} C z^r + \frac{1}{m} D z^s + \&c..$$

$$\frac{1}{m} A z^p + \frac{1}{m} B z^q + \frac{1}{m} C z^r + \&c..$$

- D. $p - 1 = 0, q - 1 = 1, r - 1 = 2, s - 1 = 3, \&c.$
 E. $A = m, {}_2B + A = m A, {}_3C + {}_2B = m B, {}_4D + {}_3C = m C.$
 F. $A = m, B = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{1}, C = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2}, D = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-3}{3}.$
 G. $\overline{1 + z}^m = 1 + m z + m \times \frac{m-1}{1} z^2 + m \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2} z^3 + \&c.$

Car la fluxion de l'égalité A divisée par z donne B, & B multipliée par $\frac{1+z}{m}$ donne C. Or comme les seconds membres des égalités A & C sont égaux, étant égaux au même binôme $1 + z^m$, il est évident que z doit avoir les mêmes exposans dans les termes correspondans : donc en comparant ces exposans, on aura les égalités D ; & à cause que les coefficients des termes correspondans doivent aussi * être égaux, leur comparaison donnera les égalités E & F. D'où en substituant les valeurs des exposans $p, q, r, s, \&c.$ & celles des coefficients A, B, C, D, dans l'égalité A, on aura la suite demandée G, laquelle sera toujours finie lorsque l'exposant m est un nombre entier positif & fini.

* Art. 114.

N. B. I. Si le premier terme du binôme étoit exprimé par a , au lieu de l'unité, il faudroit multiplier & diviser les termes de la suite par a & par ses puissances, en sorte que les exposans de chaque terme soient chacun égal à l'exposant m du binôme.

II. Pour avoir une suite infinie égale à un multinôme quelconque $1 + b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + e z^{4n} + f z^{5n}$ élevée à la puissance m , il faudra supposer le premier terme 1 égal au premier terme 1 du binôme, & les autres termes $b z^n + c z^{2n} + d z^{3n} + e z^{4n} + \&c.$ égal au second terme z , ce qui donnera

$$\begin{aligned} \text{H. } 1 + A b z^n + A c z^{2n} + A d z^{3n} + A e z^{4n} + A f z^{5n} + \&c.; \\ + B b^2 z^{2n} + {}_2 B b c z^{3n} + {}_2 B b d z^{4n} + {}_2 B b e z^{5n} + \&c. \\ + B c c z^{4n} + {}_2 B c d z^{5n} + \&c. \\ + C b^3 z^{3n} + {}_3 B b b c z^{4n} + {}_3 C b b d z^{5n} + \&c. \\ + {}_3 C b c c z^{5n} + \&c. \\ + {}_4 D b^4 z^{4n} + {}_4 D b^3 c z^{5n} + \&c. \\ + E b^5 z^{5n} + \&c. \\ \text{égale} \end{aligned}$$

égale à $1 + b\zeta^n + c\zeta^{2n} + d\zeta^{3n} + e\zeta^{4n} + f\zeta^{5n} + \&c.$, en supposant $A = m$, $B = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$, $C = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2}$, $D = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, &c.

E X E M P L E I.

216. Pour extraire la racine quarrée de $aa + xx$.

On supposera dans la suite G, $aa = 1$, $\zeta = xx$, $m = \frac{1}{2}$, ce qui donnera $\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{\zeta x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \&c.$

E X E M P L E I I.

217. Pour extraire la racine quarrée de $aa + bx + xx$.

On supposera dans la suite H, $aa = 1$, $\zeta^n = x$, $c = 1$, $d = e = f = 0$, ce qui donnera $a + \frac{bx}{2a} + \frac{4aa - bb}{8a^3} xx - \frac{4aab - b^2}{16a^5} x^2 + \frac{24aabb - 6b^4}{128a^7} x^4 - \&c.$ pour la suite demandée.

L E M M E I I.

218. Dans une progression géométrique telle que 1, y , y^2 , y^3 , y^4 , y^5 , si le logarithme du premier terme 1 est zero, celui du second x , celui du 3^{me} sera $2x$, celui du 4^{me} $3x$, celui de y^n , nx , &c. Or comme les fluxions des termes de la progression géométrique, divisées par les mêmes termes,

seront $\frac{\dot{y}}{y} : \frac{\dot{y}}{y} : \frac{\dot{y}}{y} : \frac{\dot{y}}{y} : \frac{\dot{y}}{y}$,

& celles des logarithmes $\dot{x} : 2\dot{x} : 3\dot{x} : 4\dot{x} : n\dot{x}$;

il est clair que le rapport de deux termes correspondans quelconques est égal au rapport des deux autres termes correspondans, comme, par exemple, le rapport de $n\dot{x}$ & de $\frac{n\dot{y}}{y}$ est égal au rapport de $\dot{x}$ & de $\frac{\dot{y}}{y}$; & pat conséquent le rapport de deux termes correspondans $\frac{n\dot{y}}{y}$, $n\dot{x}$, étant exprimé pat N, celui de deux autres termes correspondans quelconques, sera exprimé pat la même quantité. D'où l'on tire cette conclusion, *que la fluxion d'un nombre quelconque divisé par le même nombre, est à la fluxion du logarithme de ce nombre dans un rapport constant.*

Lorsque $\frac{1}{y} = x$, c'est-à-dire lorsque $N = 1$, les logarithmes sont nommés *naturels* ou *hyperboliques*.

Comme on a $\frac{1}{y} = \frac{x}{N}$ en général, l'on voit qu'en prenant différens nombres pour N , on aura autant de systèmes différens de logarithmes.

N. B. Ce qu'on vient de dire prouve parfaitement la première proposition & les quatre corollaires qui suivent de M. Cotes, dans son Livre de *Harmonia mensurarum*.

M. Cotes nomme la quantité N le module du système, & l'unité divisée par N le module réciproque.

P R O B L È M E I I.

219. L'on demande le logarithme z d'un nombre exprimé par $1 + x$.

* Art. 113. La fluxion x de $1 + x$, divisée par cette quantité, doit être égale $\frac{x}{N}$; donc $\frac{x}{N} = \frac{x}{1+x}$. Or si l'on réduit $\frac{1}{1+x}$ en une suite infinie par une division continuelle, ou par l'article 215, on aura $\frac{x}{N} = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \&c.$ dont la fluente sera $\frac{x}{N} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \&c.$

Si le nombre est moindre que l'unité, on aura $1 - x$, dont la fluxion sera $-x$; par conséquent $-\frac{x}{N} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \&c.$ sera le logarithme cherché. D'où l'on voit que le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité sera positif, & celui d'un nombre moindre que l'unité négatif.

C O R O L L A I R E.

220. De là il suit que si l'on veut avoir le logarithme de $\frac{a+x}{a}$, on aura $\frac{x}{a+x} = \frac{x}{N}$, dont la fluente, en supposant $A = z$, sera $\frac{A}{N} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$ Par la même raison le logarithme B de $\frac{a-x}{a}$, sera $\frac{B}{N} = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$ Par conséquent leurs différences $A + B = N \times$ par $\frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{5a^5} + \frac{1}{7a^7} + \&c.$ sera le logarithme de $\frac{a+x}{a-x}$, puisqu'en retranchant les logarithmes on doit diviser les nombres.

E X E M P L E I.

221. Soit $N = 1$, $x = \frac{1}{10} = 0, 1$, & soit z le logarithme de $(1 + x) = 1 + 0, 1 = 1, 1$, & v celui de $(1 - x) = 1 - 0, 1 = 0, 9$, on aura $z = 0, 1 - \frac{0, 01}{2} + \frac{0, 001}{3} - \frac{0, 0001}{4} + \&c.$ & $v = 0, 1 + \frac{0, 01}{2} + \frac{0, 001}{3} + \frac{0, 0001}{4} + \&c.$ dont la moitié de la somme est $\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}v = \frac{0, 01}{2} + \frac{0, 0001}{4} + \frac{0, 000001}{6} + \&c.$ & la moitié de leur différence $\frac{z}{2} + \frac{v}{2} = 0, 1 + \frac{0, 001}{3} + \frac{0, 00001}{5} + \&c.$ Ces termes étant réduits & mis par ordre, donnent

0, 00502. 51666. 66666. 66666. 667.
 12. 60083. 33333. 333.
 71428. 571.
 625. 000.
 5. 556.
 50.
 1.

0, 00502. 51679. 26750. 72059. 178 $= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}v.$

0, 10033. 33333. 33333. 33333. 333.
 20142. 85714. 28571. 428.
 1. 11111. 11111. 111.
 909. 09090. 909.
 7. 69230. 769.
 6666. 666.
 58. 823.
 526.
 5.

0, 10033. 53477. 31075. 58063. 571 $= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}v.$
 0, 00502. 51679. 26750. 72059. 178.

0, 09531. 01798. 04324. 86004. 393 $= z$
 0, 10536. 05156. 57826. 30122. 749 $= v.$
 O ij

E X E M P L E I I.

222. Soit $x = \frac{1}{10} = 0,2$; $N = 1$, $A = \log. (1+x) = 1,2$; & $B = \log. (1-x) = 0,8$, on aura $\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B = \frac{0,04}{2} + \frac{0,0016}{4} + \frac{0,000064}{6} + \&c.$ & $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B = 0,2 + \frac{0,008}{3} + \frac{0,00632}{5} + \&c.$ Ces termes étant réduits & mis par ordre, donnent

0, 02041. 06666. 66666. 66666. 666.
 3305. 81333. 33333. 333.
 11702. 87514. 285.
 409. 60000. 000.
 14. 56355. 556.
 52428. 800.
 1906. 502.
 69. 905.
 2. 581.
 96.
 3.

0, 02041. 09972. 60127. 56477. 727 $= \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B.$

0, 20266. 66666. 66666. 66666. 666.
 6. 58285. 71428. 57142. 857.
 568. 88888. 88888. 889.
 18. 61818. 18181. 818.
 63015. 38461. 538.
 2184. 53333. 333.
 77. 10117. 647.
 2. 75941. 052.
 9986. 438.
 364. 722.
 13. 422.
 497.
 18.
 1.

0, 20273. 25540. 54082. 19098. 898 $= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B.$
 0, 02041. 09972. 60127. 56477. 727.

$A=0$, 18232. 15567. 93954. 62621. 171.

$B=0$, 22314. 35513. 14209. 75576. 625.

COROLLAIRE I.

223. Puisque $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, & que les logarithmes $B(0, 8)$, $\nu(0, 9)$ sont négatifs, la somme $B + \nu$ étant ajoutée au double du logarithme de $A(1, 2)$, donnera 0, 69314. 71805. 59945. 30941. 723, pour le logarithme de 2.

De même, à cause que $\frac{1 \times 1 \times 1}{0.8} = 10$, le logarithme $B(0, 8)$ étant ajouté au triple du logarithme de 2, donnera 2, 30258. 50929. 94045. 68401. 799, pour le logarithme de 10.

Enfin puisque $1, 1 \times 10 = 11$; $0, 9 \times 10 = 9$; $1, 2 \times 10 = 12$; $0, 8 \times 10 = 8$, en ajoutant les logarithmes de 1, 1, (7) 1, 2 (A), à celui de 10, & retranchant ceux de 0, 9 (ν) 0, 8 (B) du même nombre 10 séparément, on aura les logarithmes de 8, 9, 11 & 12.

De ce qu'on vient de dire on a construit cette Table des logarithmes hyperboliques, des nombres depuis 2 jusqu'à 40, laquelle sera d'un grand usage dans la quadrature des courbes, comme on verra ci-après. On auroit pu la continuer à un plus grand nombre; mais comme notre intention n'a été que de faire voir la méthode de trouver les logarithmes, sans vouloir faire des tables, ce que nous avons dit ici est suffisant.

<i>Nomb.</i>	<i>Logarithmes Hyperboliques.</i>
2	0, 69314. 71805. 59945. 30941.
3	1, 09861. 22886. 68109. 69139.
4	1, 38629. 43611. 19890. 61883.
5	1, 60943. 79124. 34100. 37460.
6	1, 79175. 94692. 28055. 00081.
7	1, 94591. 01490. 55313. 30511.
8	2, 07944. 15416. 79835. 92825.
9	2, 19722. 45773. 36219. 38279.
10	2, 30258. 50929. 94045. 68402.
11	2, 39789. 52727. 98378. 54406.
12	2, 48490. 66497. 88000. 31023.
13	2, 56494. 93574. 61536. 73605.
14	2, 63905. 73296. 15258. 61451.
15	2, 70805. 02011. 02210. 06599.
16	2, 77258. 87222. 39781. 23766.
17	2, 83321. 35040. 56228. 88025.
18	2, 89037. 17578. 96164. 69211.
19	2, 94443. 89791. 66440. 46001.
20	2, 99573. 22735. 53990. 99343.
21	3, 04452. 24377. 23422. 99650.
22	3, 09104. 24533. 58315. 85348.
23	3, 13549. 42159. 29149. 69081.
24	3, 17805. 38303. 47945. 61965.
25	3, 21887. 58248. 68200. 74920.
26	3, 25809. 65380. 21482. 04547.
27	3, 29583. 68660. 04329. 07418.
28	3, 33220. 45101. 75203. 92394.
29	3, 36729. 58299. 86474. 03018.
30	3, 40119. 73816. 62155. 37541.
31	3, 43398. 72044. 85146. 24599.
32	3, 46573. 59027. 99726. 54709.
33	3, 49650. 75614. 66480. 23545.
34	3, 52636. 06846. 16174. 39919.
35	3, 55534. 80614. 89413. 67971.
36	3, 58351. 89384. 56110. 00162.
37	3, 61091. 79126. 44224. 44537.
38	3, 63758. 61597. 26385. 76943.
39	3, 66356. 16461. 29646. 42745.
40	3, 68887. 94541. 13936. 30285.

COROLLAIRE II.

224. Puisque $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ exprime le logarithme hyperbolique du nombre $1+x$, & $N \times$ par $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ le logarithme du même nombre d'un système quelconque, il s'ensuit que pour trouver la valeur de N dans quelqu'autre système, il faut diviser le logarithme d'un nombre quelconque de ce système par le logarithme hyperbolique du même nombre: le quotient sera la valeur cherchée.

Par exemple, dans les tables ordinaires le logarithme de 10 est $= 1$, & le logarithme hyperbolique de 10 étant de 2, 30258. 50929. 94045, on trouvera $N = 0, 434294481903$; & par conséquent le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque étant multiplié par cette valeur de N , donnera le logarithme tabulaire du même nombre.

Si le logarithme hyperbolique de 10 est nommé M , & celui d'un autre nombre quelconque l , & le logarithme tabulaire du même nombre L , on aura $N l = L$, & $l = \frac{L}{N}$, ou $l = M L$, parce que $\frac{1}{N} = M$.

Il faut bien remarquer la formule $l = M L$, parce qu'elle est d'un grand usage ci-après dans la quadrature des figures.

PROBLEME . III.

225. *Le logarithme z. d'un nombre quelconque x étant donné, l'on demande ce nombre.*

Supposons $x = 1 + a z + b z z + c z^3 + d z^4 + \&c.$ dont la fluxion divisée par z , sera $\frac{x}{z} = a + 2 b z + 3 c z z + 4 d z^3 + \&c.$ Or comme $* z = N \times \frac{z}{x}$, ou $\frac{x}{N} = \frac{z}{z}$, on aura $\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{x}{N} = * \text{Art. 218.}$
 $a + 2 b z + 3 c z z + 4 d z^3 + \&c.$ ou $x = N \times$ par $a + 2 b z + 3 c z z + 4 d z^3 + \&c.$ En comparant cette valeur de x avec la première, on aura

$$N \times \text{par } a + 2 b z + 3 c z z + 4 d z^3 + \&c. \} \\ - 1 - a z - b z z - c z^3 - \&c. \} = 0.$$

Si l'on égale les coefficients des termes correspondans, * on * Art. 214.
 aura $N a = 1$, $2 b N = a$, $3 c N = b$, $4 d N = c$, &c. d'où

l'on tire $a = \frac{1}{N}$, $b = \frac{1}{2N^2}$, $c = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot N^3}$, $d = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot N^4}$. Par consé-
quent $x = 1 + a\zeta + b\zeta\zeta + \&c.$ deviendra

$$x = 1 + \frac{1}{N}\zeta + \frac{\zeta\zeta}{2N^2} + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3 \cdot N^3} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot N^4} + \&c.$$

Si $N = 1$, on aura $x = 1 + \zeta + \frac{\zeta\zeta}{1 \cdot 2} + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$
pour le nombre du logarithme hyperbolique ζ .

Si l'on veut avoir le nombre correspondant au logarithme hyperbolique qui est l'unité, en supposant $\zeta = 1$, on trouvera 2, 7182818 pour le nombre cherché.

N. B. Comme on se servira souvent des Tables des logarithmes dans la suite, on en va expliquer quelques règles pour mieux entendre l'usage que l'on aura besoin de sçavoir ci-après.

I. Dans une progression arithmétique telle que d , $d+1$, $d+2$, $d+3$, $d+4$, &c. on a 1°. le carré d'un terme quelconque $d+1$, qui surpasse de l'unité le rectangle $d \times d+2$ des termes adjacens.

2°. Le carré du quatrième terme $d+3$, multiplié par le premier d , qui surpasse de 4 le carré du second $d+1$ multiplié par le cinquième $d+4$. D'où l'on tire une manière fort abrégée pour trouver les logarithmes des nombres premiers.

Sçavoir, en ajoutant au logarithme de $\frac{d \cdot d + 2 \cdot d + 1}{d \cdot d + 2 \cdot d + 1}$ la somme des logarithmes de d & de $d+2$, la somme sera le logarithme de $d+1$.

Et en retranchant la somme des logarithmes de d & de $\frac{d^3 + 6dd + 9d + 4}{d^3 + 6dd + 9d}$ de la somme des logarithmes de $d+1$ & de $d+4$, la différence sera le logarithme de $d+3$.

Par exemple, pour avoir le logarithme tabulaire de 17, on supposera $d+3 = 17$, ou $d = 14$; ainsi $\frac{d^3 + 6dd + 9d + 4}{d^3 + 6dd + 9d} =$

* Art. 120. $\frac{4010}{4046} = \frac{1015}{1013}$; & en se servant de la suite $*N \times \frac{2x}{a} + \frac{2x}{3a^2} + \&c.$,

* Art. 124. on aura $*N = 0,43429.44819$, & $\frac{a+x}{a-x} = \frac{1015}{1013}$, ou $a = 2024$
& $x = 1$. Donc $N \times \frac{2x}{a} = 0,00042.914474$.

Or la somme 1, 14655. 718042 de ce logarithme & de celui de (d) 14, étant retranchée de la somme 3, 60745. 50322 des

des logarithmes de $(d+1)^{15 \times 15}$, & de $(d+4)^{18}$, donnera 2, 46089. 784280, pour le logarithme de 17×17 . Par conséquent la moitié 1, 23044. 892140 de ce logarithme sera celui de 17, sans erreur jusqu'à la dernière figure.

On doit remarquer que a est toujours la moitié de la somme, & x la moitié de la différence dans la suite $N \times \frac{1}{a} + \frac{1}{3a}$, + &c. des nombres $\frac{a+x}{a}$, dont cette suite exprime le logarithme de leur quotient.

II. Si l'on suppose que les trois appliquées P M, Q N, R S *Fig. 149. n. 1.* d'une courbe expriment les logarithmes des trois nombres dont P Q, Q R expriment leurs différences, il est évident que si la différence entre les appliquées P M, R S est fort petite, eu égard à ces mêmes appliquées, on peut les considérer comme étant en progression arithmétique, & par conséquent $RS - PM : PR :: QN - PM : PQ :: RS - QN : QR$, ou si $RS - PM = L$, $PR = 1$, $RS - QN$, ou $QN - PM = Z$, QR ou $PQ = x$, on aura $L : 1 :: Z : x$, ou $xL = Z$, & par conséquent $PM + Z = QN$, ou $RS - Z = QN$.

D'où l'on tire la règle ordinaire ; sçavoir, la différence entre les logarithmes P M, R S les plus proches de Q N, celui qu'on cherche, multipliée par la différence x des nombres d'un de ces logarithmes & de celui qu'on cherche, est égale à la différence de ce logarithme donné & de celui cherché.

Mais si l'on veut avoir le nombre d'un logarithme donné Q N, on aura la différence z entre le logarithme donné & le plus proche dans les tables, divisée par la différence L des logarithmes tabulaires les plus proches, sera égale à la différence x entre le nombre cherché & celui qui correspond au logarithme le plus proche.

Ou bien si a exprime la moitié de la somme, & x la moitié de la différence du nombre donné, & de celui dont le logarithme tabulaire est le plus proche, on aura $*Z = \frac{1}{a} \times N$ *pro- * Art. 120.*
ximæ.

Si par exemple on veut avoir le logarithme de $100 + \frac{1}{10}$, on aura $2a = 200 + \frac{1}{10} = \frac{2001}{10}$, & $2x = \frac{1}{10}$; ainsi $Z = \frac{1}{a}$, $N=0$, 00043408244, lequel étant ajouté au logarithme de 100, donne 2, 00043408244 pour le logarithme cherché. On trouvera

2, 0004321378 par la règle ordinaire; le premier est vrai jusqu'à 10 figures, au lieu que le dernier n'est vrai qu'à la 6^{me} figure.

Pour avoir le logarithme de 4, 236067977, on divisera ce nombre par 100000, pour avoir 4, 2360 + $\frac{67977}{100000}$. Or par la règle $xL = Z$, la différence des logarithmes des nombres 4, 2360. 4, 2361 les plus proches, est $L = 102524$, & $x = \frac{67977}{100000}$. Ainsi Z (ou $xL =$) 69692, qui étant ajouté au logarithme 0, 6269559514, de 4, 2360, donnera 0, 6269629206. pour le logarithme demandé sans erreur.

Pour avoir le nombre du logarithme A. 3, 6269432034, on voit que le logarithme B. 3, 6268534147 de 4235 est trop petit, & le logarithme C. 3, 6269559514 de 4236 est trop grand. Ainsi je divise la différence (7) 897887 de A & B, par la différence (L) 1025367 de C & B, ce qui donne $x = \frac{897887}{1025367} = 8756738$; ce nombre étant ajouté au moindre nombre 4235, donnera 4235, 8756738 pour le nombre cherché.

Comme la différence de C & A, divisée par la différence de C & B, étant retranchée du plus grand nombre 4236 donne la même chose, on peut être assuré que le nombre est vrai jusqu'à la dernière figure.

L E M M E I I I.

Fig. 149 n. 3. 226. Soient les cosinus $CP = x$, $CQ = u$, des arcs AM , AN , & les sinus $PM = y$, $QN = z$. Si MG est le sinus & CG le cosinus de leur différence MN , on aura $MG = uy - xz$, & $CG = ux + yz$, lorsque le rayon CA est l'unité.

Soit MG prolongée jusqu'à la rencontre de CA en H , & soit F l'intersection de PM & de CN , les triangles semblables CQN , CPF , CHG & MFG donnent 1°. $CQ : QN :: CP : PF = \frac{xz}{u}$, & $FM = y - \frac{xz}{u}$. 2°. $CN : CQ :: FM : MG = uy - xz$. 3°. $CQ : QN :: MP : PH = \frac{yz}{u}$, & $CH = x + \frac{yz}{u}$. 4°. $CN : CQ :: CH : CG = ux + yz$.

Si l'arc AM étoit plus grand qu'un quart de cercle, son cosinus x devient négatif; & si cet arc devient plus grand qu'une demi-circonférence, son sinus y devient négatif: il en est de même à l'égard du sinus & cosinus de l'arc AN , ou de MN .

COROLLAIRE.

227. De là il suit que si r, t, T expriment les tangentes des arcs AN, AM, MN , on aura $tx = y, ru = z$, & $\left(\frac{xy - xz}{ux + yz}\right) = T = \frac{t - r}{1 + r^2}$. Par conséquent deux de ces tangentes étant données, la troisième sera aussi donnée.

REMARQUE.

On peut tirer de l'équation $T = \frac{t - r}{1 + r^2}$, plusieurs manières fort abrégées pour la quadrature du cercle. Car si a, b, c, d expriment les tangentes des arcs A, B, C, D respectivement, en supposant $a = 1, b = \frac{1}{2}$, &c

$$\left\{ \begin{array}{l} C = A - B \\ D = C - B \\ E = D - B \\ F = B - E \end{array} \right\} \text{ on aura } \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \\ e = \frac{1}{2} \\ f = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

D'où en faisant évanouir C, D, E , on trouvera $A = 4B - F$, c'est-à-dire 4 fois l'arc B , dont la tangente est $= \frac{1}{2}$ moins l'arc F , dont la tangente est $= \frac{1}{19}$, sera égal à l'arc A de 45° .

Si $c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$, en suivant la même manière d'opérer, on trouvera $45^\circ = 2D + 5C$. De même si $a = \frac{1}{12}\sqrt{3}, c = \frac{1}{12}\sqrt{3}$, on aura $30^\circ = 3A + 2C$.

PROBLEME IV.

Trouver la valeur d'un arc de cercle AM , le rayon $AC(1)$ & la tangente $AT(z)$ étant donnés.

Soit $Tt = z$, & soit tr perpendiculaire sur la sécante CT , Fig. 153. on aura, à cause des triangles semblables, $CAT, Trt, CT(\sqrt{1+z^2}) : CA(1) :: Tt(z) : tr = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$; & CT est à CM , comme la vitesse circulaire * tr du point T est à la vitesse circulaire du point M , ou à la fluxion de l'arc $AM = \frac{z}{1+z^2}$. En réduisant $\frac{z}{1+z^2}$ en une suite infinie, par une division continuelle, ou par l'article 215, on aura $\frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + z^5 - z^7 + z^9 - \&c.$ dont la fluente $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{8}z^8 - \&c.$ exprimera la valeur cherchée.

P ij

E X E M P L E I.

229. Si $\frac{1}{7} = \frac{1}{239}$, on aura $\frac{1}{239} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{239} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{239} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{239} + \&c.$ Cette suite étant réduite en nombre décimal, donnera

$$\begin{array}{r}
 0,00418.41004.18410.04184.101 \\
 \quad \quad \quad 256.47231.442 \\
 \hline
 4 \\
 \hline
 + 0,00418.41004.18666.51415.547 \\
 - \quad \quad \quad 244.16591.79029.093 \\
 \hline
 0,00418.40760.02074.72386.454 = AM.
 \end{array}$$

E X E M P L E I I.

230. Si $\frac{1}{7} = \frac{1}{3}$, on aura $0,2 - \frac{0,008}{3} + \frac{0,00031}{5} - \frac{0,0000128}{7} + \&c.$ Cette suite étant réduite en nombre décimal, donnera

$$\begin{array}{r}
 0,20006.40568.88888.88888.888 \\
 \quad \quad \quad 63015.38461.538 \\
 \quad \quad \quad 77.10117.647 \\
 \quad \quad \quad 9986.438 \\
 \quad \quad \quad 13.422 \\
 \quad \quad \quad 18 \\
 \hline
 + 0,20006.40569.51981.47467.952 \\
 - \quad \quad \quad 266.84971.02100.71630.947 \\
 \hline
 0,19739.55598.49880.75837.005 = AM.
 \end{array}$$

Or comme 4 fois l'arc dont la tangente est $\frac{1}{7}$ moins l'arc dont la tangente est $\frac{1}{3}$, est égal 45° , il s'ensuit que 16 fois l'arc de la tangente $\frac{1}{7}$ moins 4 fois l'arc de la tangente $\frac{1}{3}$, sera $= 180^\circ = 3,14159.26535.89793.23846.264$ sans erreur jusqu'à la dernière figure.

Si l'on suppose le diamètre $= 7$, on aura 21,99114, &c. ou 22 *proxima* pour la circonférence, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{100}$, ce qui est la règle d'*Archimede*. Mais si le diamètre est $= 113$, la circonférence sera 355; & l'erreur sera moindre que $\frac{1}{1000000}$.

COROLLAIRE I.

231. De là il suit que si un arc de cercle est donné en degrés, on pourra aussi trouver la valeur de cet arc en parties du diamètre, en disant que 180° est au nombre de degrés de cet arc, comme 3, 14159. 26535, &c. est à cet arc exprimé en parties de diamètre.

COROLLAIRE II.

232. Si donc r exprime le rayon d'un cercle, sa demi-circumférence sera exprimée par $r \times 3, 14159$, &c. & si D exprime un arc quelconque de ce cercle en degrés, on aura $180^\circ : D :: r \times 3, 14159$, &c. : $D r \times 0, 01745. 32925. 19943$ = à la valeur de cet arc en parties du rayon; ou si $K = 0, 01745$, &c. cette valeur sera $= r D K$. *Ce qu'il faut bien remarquer, parce que cette valeur sera d'un grand usage dans la suite.*

PROBLEME V.

233. Le rayon AC (1) & l'arc MA (z) étant donnés, trouver le sinus PM (y) de cet arc.

Le cosinus de cet arc sera $= \sqrt{1 - yy}$, & par la propriété du cercle, $\sqrt{1 - yy} : 1 ::$ le sinus (y) est à la tangente, ou $z : y :: 1 : \sqrt{1 - yy}$. D'où en quarrant & en multipliant par 1 —

yy , on aura $y^2 = z^2 \times 1 - yy$. Cela posé, si $A. y = z + a z^3 + b z^5 + c z^7 + \&c.$ en prenant la fluxion $y = z + 3 a z^2 + 5 b z^4 + 7 c z^6 + \&c.$ en mettant les valeurs de y & de y dans $y^2 = z^2 \times 1 - yy$, & égalant le tout à zero, on aura.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ +1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} +1 \\ +6a \end{array} \right\} z^2 + \left\{ \begin{array}{l} +2a \\ +10b \\ +9aa \end{array} \right\} z^4 + \left\{ \begin{array}{l} +12b \\ +14c \\ +30ab \end{array} \right\} z^6 + \&c.$$

En comparant les coefficients des termes homologues *, on aura $1 = 1$, $-1 = 6a$, $-10b = 9aa + 2a$, $-14c = aa + 30ab + 2b$. D'où l'on tire $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{120}$, $c = \frac{1}{1080}$. Par conséquent l'équation A deviendra

$$y = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} A + \frac{z^5}{4 \cdot 5} B - \frac{z^7}{6 \cdot 7} C + \&c.$$

Les lettres A, B, C expriment chacune le terme qui lui précède.

P R O B L E M E V I.

234. Le rayon AC (1) & l'arc AM (τ) étant donnés, trouver le sinus versé AP (x).

On aura $y = \sqrt{2x - xx}$, & $\sqrt{2x - xx} : 1 ::$ la soutangente est à la tangente, ou $* : \dot{x} : \dot{z} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{2x - xx}}$; en quarrant

& multipliant par $2x - xx$, il viendra $\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \times 2x - xx$. Cela posé, si $x = a\tau^2 + b\tau^4 + c\tau^6 + \&c.$ on aura en prenant la fluxion $y = 2a\dot{z}\tau + 4b\dot{z}\tau^3 + 6c\dot{z}\tau^5 + \&c.$ Les valeurs de $\dot{x}$ & de x étant mises dans l'équation $\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \times 2x - xx$, & l'égalant à zero, donne

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} +2a \\ -4aa \end{array} \right\} \tau^2 \left\{ \begin{array}{l} +2b \\ -16ab \end{array} \right\} \tau^4 \left\{ \begin{array}{l} +2c \\ -2ab \\ -24ac \\ -16bb \end{array} \right\} \tau^6 + \&c.$$

En comparant les coefficients des termes homologues, on aura $2a = 4aa$, $2b = aa + 16ab$, $2c = 2ab + 24ac + 16bb$, ou $a = \frac{1}{2}$, $-b = \frac{1}{14}$, $c = \frac{1}{140}$. Par conséquent l'équation A deviendra $x = \frac{22}{1.2} - \frac{22}{3.4} A + \frac{22}{5.6} B - \frac{22}{7.8} C + \&c.$

Les lettres A, B, C expriment chacune le terme qui lui précède.

R E M A R Q U E.

Comme les valeurs que nous venons de trouver des sinus droits & versés sont d'un usage admirable dans la construction des tables des sinus, nous en donnerons quelques exemples en peu de mots pour éclaircir le sujet.

I. Soit l'arc τ d'une minute, ou la 10800^{me} partie de la demi-circonférence, on aura $* \tau = 0,00029.08882.086$. Ainsi le sinus y fera $= 0,00029.08882.086$, vrai à 12 figures; le sinus versé AP $= 0,00000.00846.157$, & le cosinus CP $= 99999.99576.922$, vrai à 15 figures s'il étoit continué.

* Art. 149. n. 4. II. Soit le rayon CM perpendiculaire sur la corde LN, & soient tirées les perpendiculaires LO, RI, MP, NQ, & les parallèles ER S, FN au rayon CA. Cela posé, si PM = a,

$CP = b$, $RM = x$, $MN = ML = z$, les triangles semblables CPM , RSM , donnent $CM : CP :: RM : RS = bx$, & $CM : PM :: RM : MS = ax$.

Or comme les arcs AN , AM , AL , & par conséquent les lignes QN , IR , OL , & CO , CI , CQ , sont en progression arithmétique, on aura $LO + NQ = (2a - 2ax) = * 2a$ *Art. 134.* $- azz + \&c.$ $CQ + CO = (2b - 2bx) = 2b - bzz + \&c.$ Si l'arc $MN = z$ est d'une minute, on aura $zz = 0$, 00000. 00846. 157. Par conséquent $LO + NQ = a \times 1$, 99970. 91117. 914, & $CQ + CO = b \times 1$, 99970. 91117. 914.

Soit par exemple LO le sinus total, PM (a) le sinus de $89^\circ 59'$, c'est-à-dire $a = 99999. 99576. 922$, on trouvera $NQ = 99999. 98665. 067$ pour le sinus d'un arc de $89^\circ 58'$. On trouvera de la même manière les sinus & cosinus des arcs depuis zero jusqu'à 30° .

III. Soit l'arc AM de 30° , PM sera $= a = \frac{1}{2}$; ainsi $LO + NQ = (2a - 2ax) = 1 - x = CR$. Ce qui montre que la somme des sinus des arcs également éloignés de 30° , est égale au cosinus de la moitié de leurs différences.

Comme on a aussi dans ce cas $PM (\frac{1}{2}) : CM (1) :: ER$, ou $\frac{1}{2} CQ - \frac{1}{2} CO : LR = CQ - CO$; ainsi la différence entre les cosinus des arcs également éloignés de 30° est égale au sinus de la moitié de leurs différences. De cette manière on peut trouver les sinus & cosinus depuis 30° jusqu'à 60° par soustraction seulement.

IV. Lorsque l'arc LN n'est que d'une minute, on peut considérer les trois lignes OL , PM , QN , comme étant en progression arithmétique; & par conséquent $LN (1) : LF :: LM : LE = LM \times LF$. D'où l'on tire la règle ordinaire; sçavoir,

La différence LF des sinus de deux arcs qui ne diffèrent que d'une minute, multipliée par la différence LM d'un de ces arcs, & d'un autre arc entre les deux, est égale à la différence LE de leurs sinus.

Et la différence entre les sinus de deux arcs AL, AM, divisée par la différence LF des arcs AM, AL, sera égale à la différence LM entre les arcs AL & AL.

Par exemple, pour avoir l'arc qui correspond au sinus A. 6789012, on voit que le sinus B. 6788007 de $42^\circ 45'$ est trop petit, & C. 6790143 celui de $42^\circ 46'$, trop grand; ainsi je di-

vive la différence (A — B) 1005 par la différence (C — B) 2136 ; le quotient ($\frac{1005}{2136}$) = 28° 1' étant ajouté à 42° 45', donnera 41° 45' 28" pour l'arc demandé.

Ce qu'on vient de dire à l'égard des sinus se peut aussi appliquer aux tangentes. On veut avoir l'arc qui correspond à la tangente A. 59234560. Comme la tangente B. 59218322 de 80° 25' est trop petite, & C. 59333455 de 80° 26', trop grande, la différence (A — B) 6238 divisée par la différence (C — B) 105133, donnera ($\frac{6238}{105133}$) = 3" 33". Ce qui étant ajouté à 88° 25', donnera 88° 25' 3" 33" pour l'arc demandé.

Comme le quotient 56" 27" de (C — A) 98895, divisé par (C — B) 105133 étant retranché de 80° 26' donne le même arc, on peut être assuré qu'il n'y a point d'erreur.

Il faut bien remarquer cette règle, parce qu'elle sert souvent dans la suite.

P R O B L E M E V I I.

235. *Trouver la fluente de $\int z \dot{z}^{n-1} \times e + f \dot{z}^{n-1}$.*

Soit $P = e + f \dot{z}^n$, & $P^{n+1} \times$ par $K \dot{z}^{n-1} + L \dot{z}^{n-2} + M \dot{z}^{n-3} - x F$, la fluente cherchée. K, L, M, &c. expriment les coefficients indéterminés, & x celui de F qui devient = 0, lorsque le nombre des termes de la fluente est fini. En faisant $\theta + \pi = s$, la fluxion de cette fluente étant posée par ordre, fera

$$N. s f K + \left\{ \frac{\theta-1, e K}{s-1, f L} \right\} \dot{z}^{n-1} + \left\{ \frac{\theta-2, e L}{s-2, f M} \right\} \dot{z}^{n-2} + \dots + e M \dot{z}^{n-1} \times \\ \times n \dot{z} \dot{z}^{n-1} P^n.$$

Car si q exprime un nombre entier quelconque, $P^{n+1} \times \dot{z}^{n-q}$ exprimera un des termes quelconques de la fluente supposée, dont la fluxion est $\frac{\pi+1}{n+1} \times P^n \times \dot{z}^{n-q} + \frac{\theta n - q n}{n+1} \times \dot{z}^{n-q-1} \times P^{n+1}$, ou $\frac{\pi+1}{n+1} \times \dot{z}^{n-q} + \frac{\theta n - q n}{n+1} \times P \dot{z}^{n-q-1}$ par $\dot{z}^{n-1} P^n$. Mais à cause que $P = e + f \dot{z}^n$, on aura $\dot{P} = n f \dot{z}^{n-1}$: en mettant ces valeurs de $\dot{P}$ & de P dans la dernière fluxion, elle deviendra $\frac{\pi+1}{n+1} \times n f \dot{z} \dot{z}^{n-q} + \frac{\theta n - q n}{n+1} \times \frac{e \dot{z}^{n-q} + f \dot{z}^{n-q-n}}{\dot{z}^{n-1} P^n} \times \dot{z}^{n-1} P^n$, ou $\frac{\pi+1}{n+1} \times \theta - q, f \dot{z}^{n-q} + \theta - q, e \dot{z}^{n-q} \times$ par $n \dot{z} \dot{z}^{n-1} P^n$, ou enfin en mettant au lieu de

de $\theta + \pi$ la valeur s , $s - q + 1$, $fz^{n-q} + \theta - q$, $e z^{-q} \times$
par $n z^{n-1} P^x$.

Or si l'on fait q égale à 1, 2, 3, &c. cette dernière fluxion deviendra celle des termes de la fluente supposée.

En faisant le coefficient sfK du premier terme de la fluxion N , égal au coefficient δ de la fluxion proposée, & ceux des autres termes chacun égal à zéro, on aura

$$\begin{array}{l|l} sfK = \delta. & +K = \frac{\delta}{n!f} \\ \overline{\theta-1}, eK + s-1, fL = 0, \text{ ou} & -L = \frac{\theta-1}{1-1} \times \frac{\delta}{n!ff} \\ \overline{\theta-2}, eL + s-2, fM = 0. & +M = \frac{\theta-1}{1-1} \times \frac{\theta-2}{1-2} \times \frac{\delta}{n!fff} \end{array}$$

Mais à cause que $x = \overline{\theta-3}$, neM & $\dot{f} = z^{n-3} P^x$, lorsque $M z^{n-3} P^{x+1}$ est le dernier terme, par la même raison $x = vneQ$, & $\dot{f} = z^{v-1} P^x$, lorsque $Q z^{v-1} P^{x+1}$ est le dernier terme. Par conséquent en mettant ces valeurs des coefficients K, L, M, x , dans la fluente ci-dessus, on aura

$$K. \left[\frac{\delta z^{n-1}}{n!f} P^{x+1} - \frac{\theta-1}{1-1} \times \frac{eA}{fz} + \frac{\theta-2}{1-2} \times \frac{eB}{fz^2} - \frac{\theta-3}{1-3} \times \frac{eC}{fz^3} \dots - vneQF \right]$$

pour la fluente cherchée.

Les lettres A, B, C , expriment chacune le terme qui les précède; le terme $vneQF$ doit avoir le signe contraire à celui du dernier terme de la suite; Q est le coefficient de ce dernier terme, & $v = -\pi$, lorsque la suite est infinie.

COROLLAIRE I.

236. D'où il suit que si $s = \theta + \pi$, est une fraction, & θ un nombre entier quelconque & positif, ou si s est un nombre entier aussi bien que θ , & $\theta < s$, la fluente K sera toujours exprimée par θ termes.

Car comme le coefficient de chaque terme multiplie toujours les termes suivans, il est évident que s'il y en a un qui devienne $= 0$, tous les suivans seront aussi $= 0$.

C O R O L L A I R E I I.

237. Il est aussi évident que dans tous les autres cas la fluente de $\mathcal{D} \dot{z} z^{n-1} \times e + f z^n$ dépend de la fluente de $Q \dot{z} z^{n-1} \times e + f z^n$. Et la fluente de cette dernière fluxion se peut réduire à la quadrature des sections coniques, lorsque θ est un nombre quelconque, & $\pi = -1$, ou si $s(\pi + \theta)$ est un nombre entier positif, ou zero, ou bien lorsque $\theta = 0$, & π est un nombre quelconque; comme on verra dans le Traité des Quadratures à la fin de ce Livre.

C O R O L L A I R E I I I.

238. Lorsque θ est négatif, on peut changer la fluxion $\mathcal{D} \dot{z} z^{n-1} \times e + f z^n$, en multipliant la quantité hors du signe radical par z^n , & en divisant celle sous ce signe par z^n , en la fluxion $\mathcal{D} \dot{z} z^{n-1} \times e z^{-n} + f$, sans changer sa valeur.

Or comme θ dans la fluxion $\mathcal{D} \dot{z} z^{n-1} \times e + f z^n$, devient ici $\theta - \pi$, parce que $\frac{\pi n - \theta n}{n} = \theta - \pi$; en mettant au lieu de θ la valeur $\theta - \pi$ dans $\theta + \pi = S$, on aura $s = \theta$; & si $\theta - \pi = r$, & que l'on mette dans la fluente $K, e, f, -n, r, \theta$, & z^n , au lieu de f, e, n, θ, s & z^n , on aura

$$L. \left[\frac{-\mathcal{D} z^n}{n z^{n+1}} P^{n+1} + \frac{r-1}{i-1} \times \frac{A}{z} f z^n - \frac{r-2}{i-2} \times \frac{B}{z^2} f z^n + \frac{r-3}{i-3} \times \frac{C}{z^3} f z^n - \dots - n f Q F \right]$$

pour la fluente $\mathcal{D} \dot{z} z^{n-1} \times e + f z^n$. Il faut remarquer que P est ici $= e z^n + f$, ou $P = \frac{e + f z^n}{z^n}$, & le reste est de même que ci-dessus.

C O R O L L A I R E I V.

239. De là il suit qu'il est évident que si θ est une fraction, & $r = \frac{\pi n - \theta n}{n}$, un nombre entier quelconque & positif, ou si θ, r , sont des entiers, & $r < \theta$, la fluente L sera toujours exprimée par r termes. Et dans tous les autres cas elle dépend de la fluente de $Q \dot{z} z^{n-1} P^r$.

N. B. Dans l'une & l'autre formule générale, lorsque la

fluente dépend de celle de $\hat{F}$, la suite doit être continuée jusqu'à ce que le dernier terme devienne négatif ou infini.

Dans les cas où la fluente de $\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1} \times e + f \hat{z}^n$ dépend de la fluente F , & que la fluente F ne se réduit pas à la quadrature des sections coniques, si $f \hat{z}^n > e$, il faudra continuer la suite K à autant de termes que l'on jugera à propos, pour avoir la fluente par approximation. Mais si $f \hat{z}^n < e$, il vaut mieux se servir de la suite de l'article 215.

EXEMPLE I.

240. Soit $\hat{x} x \sqrt{aa + x x}$ la fluxion proposée, en la comparant avec $\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1} \times e + f \hat{z}^n$, on aura $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\theta n - 1 = 3$, ou $\theta = 2$, $\theta + \pi = s = \frac{5}{2}$, $e = aa$, $\delta = f = 1$, & $\hat{z}^n = x x$. Ces valeurs étant mises dans la fluente K , on aura $\frac{3 x x - 1 a a}{15} \times a a + x x^{\frac{5}{2}}$ pour la fluente cherchée.

Mais si $\frac{a^2 x}{x^2} \sqrt{aa + x x}$ est la fluxion proposée, on aura en la comparant avec $\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1} \times e + f \hat{z}^n$, $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\theta n - 1 = -4$, ou $\theta = \frac{3}{2}$, $\theta - \pi = r = 1$, $e = aa$, $\delta = a^2$, $\hat{z}^n = x x$; par conséquent la formule L donnera $-\frac{a^2}{3} \times \frac{aa + x x^{\frac{3}{2}}}{x x}$ ou $-\frac{a^2}{3 x^2} \times a a + x x^{\frac{3}{2}}$ pour la fluente cherchée.

EXEMPLE II.

241. Soit $\frac{\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1}}{e + f \hat{z}^n}$, on aura $\pi = -1$, $\theta = 4$, $\theta + \pi = s = 3$. Or comme $s < \theta$, cette fluente dépend * de la fluente F . * Art. 237. Ainsi * $-\pi = v = 1$, & $\hat{F} = \frac{\hat{z} \hat{z}^{n-1}}{e + f \hat{z}^n}$; & par conséquent * Art. 235. puisque $\frac{\hat{z} \hat{z}^{n-1}}{e + f \hat{z}^n}$ est la fluxion du logarithme de * $\frac{e + f \hat{z}^n}{e}$ multiplié * Art. 212. par $\frac{1}{n f}$, la formule K donnera $\frac{\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1}}{3 n f} \frac{\delta e \hat{z}^{n-1}}{2 n f f} + \frac{\delta e \hat{z}^n}{n f^2} - \frac{\delta e^2}{n f^2} \log \frac{e + f \hat{z}^n}{e}$; car $Q = \frac{\delta e e}{n f^2}$.

Mais si $\frac{\delta \hat{z} \hat{z}^{n-1}}{e + f \hat{z}^n}$ est la fluxion dont on veut avoir la fluente, on aura $\pi = -1$, $\theta = 3$, $\theta - \pi = 4 = r$; & comme $\theta < r$, la fluente dépend de la fluente F ; ainsi $-\pi = v = 1$, & * $\hat{F} =$ * Art. 212.

Q ij

$\frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$, dont la fluente sera $\int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$ multipliée par $\frac{1}{n}$. Par conséquent la formule L donnera $\frac{dx^{n-1}}{3neez^{10}} + \frac{df}{2neez^{10}} - \frac{dff}{ne^2z^2} + \frac{dn}{ne^2}$ $\int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$ pour la fluente cherchée.

E X E M P L E I I I.

242. Soit $\int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n} \times e + f \int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$ la fluxion proposée, & P la fluente donnée de $\int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n} \times e + f \int \frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$. Si l'on nomme G la fluente cherchée, & que l'on mette $\theta + 1$, & θ au lieu de θ & ν dans la formule K, elle donnera $G = \frac{dx^{n-1}}{nef} - \frac{e\theta}{if}$ F, parce que $Q = \frac{d}{nif}$: il faut remarquer que $s = \theta + \pi - 1$.

R E M A R Q U E.

Quoique ce probleme donne tous les cas possibles dans lesquels la fluente peut être exprimée par un nombre fini de termes, il ne réduit néanmoins pas toutes les expressions aux cas les plus simples pour réduire la fluente à la quadrature des sections coniques lorsqu'elle en dépend; mais comme ce qu'on vient de dire suffit pour ce qui suit, on a mieux aimé renvoyer le lecteur au Traité de la Quadrature, où on donne ce qui reste ici à démontrer.

Explication des Tables suivantes.

On les a construites par le moyen du 7^{me} probleme, en y substituant les différentes valeurs de θ que l'on voit dans la première colonne verticale de chaque page au-dessous de θ dans les formules K & L; les fluentes provenant de ces valeurs sont à côté de ces nombres dans les colonnes parallèles, & la formule générale des fluxions est à la tête de chaque page.

Par exemple, lorsque $\theta = 1$, la seconde formule $\frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$ devient $\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{e+fx^{\frac{1}{2}}}$ dont la fluente $\frac{2dx^{\frac{1}{2}}}{nf} - \frac{2}{nf} d\odot$ est à côté de l'unité.

De même lorsque $\theta = 0$, la première formule $\frac{dx^{n-1}}{e+fx^n}$ devient $\frac{dx^{-1}}{e+fx^0}$, dont la fluente $\frac{-d}{ne} \int M$ est à côté de zero; ainsi des autres.

La lettre D au bas de chaque page exprime un arc de cercle en degrés, dont R est le rayon, & T la tangente, L le logarithme tabulaire de la quantité $\frac{R+T}{S}$, & $\odot$ est $\ast = RDK$ lorsque ** Art. 232* la valeur de R est impossible, ou bien $\ast \odot = RLM$, lorsque ** Art. 224* cette valeur de R est possible.

Il faut remarquer que lorsque $\odot$ exprime un arc de cercle, il faut changer de signe à la valeur de R, afin qu'elle devienne possible.

Comme les valeurs de R, S, T, sont telles que $SS = TT \pm RR$, lorsque $\odot$ exprime un arc de cercle D; & $SS = TT - RR$, lorsque $\odot$ exprime un logarithme L, & R étant toujours égal à une quantité constante, on aura $\ast \dot{D} = \frac{RR\dot{T}}{SS}$, & $\dot{L} = \frac{-R\dot{T}}{SS}$, ou $R\dot{L} = \frac{-RR\dot{T}}{SS}$. Car le logarithme de $\frac{T+R}{S}$ est égal à la différence des logarithmes de T + R & de S ou de son égal $\sqrt{TT-RR}$; or la fluxion du logarithme de T + R est $\ast \frac{\dot{T}}{T+R}$, ou $\frac{\dot{T} \times T - R\dot{T}}{TT-RR}$; & celle du logarithme de S ou de ** Art. 228*

$\sqrt{TT-RR}$ sera $\frac{T\dot{T}-R\dot{T}}{TT-RR}$. Donc $\frac{T\dot{T}-R\dot{T}-T\dot{T}}{TT-RR} = \frac{-R\dot{T}}{SS}$, parce que $SS = TT - RR$.

Comme on a trouvé les fluentes de chaque Table par le moyen de celle du cas le plus simple, c'est-à-dire par celui où $\theta = 0$, il reste à faire voir que les fluentes des cas où $\theta \neq 0$, sont bien exprimées.

Lorsque $\theta = 0$, la seconde formule devient $\frac{diz^{\frac{1}{n}}}{e+fz^{\frac{1}{n}}}$. Or comme $R = \sqrt[n]{e}$, $T = z^{\frac{1}{n}}$, & $S = \sqrt[n]{e+fz^{\frac{1}{n}}}$, on aura $\dot{T} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{neiz^{\frac{1}{n}-1}}{2, e+fz^{\frac{1}{n}}}$. Par conséquent $\frac{2d}{n\epsilon} \odot$ est la fluente de $\frac{diz^{\frac{1}{n}-1}}{e+fz^{\frac{1}{n}}}$.

Lorsque $\theta \neq 0$, la troisième formule devient $\frac{diz^{-1}}{\sqrt{e+fz^{\frac{1}{n}}}}$; & comme $R = \sqrt{e}$, $S = \sqrt{fz^{\frac{1}{n}}}$, & $T = \sqrt{e+fz^{\frac{1}{n}}}$, on aura $\dot{T} = \frac{nfz^{\frac{1}{n}-1}}{2\sqrt{e+fz^{\frac{1}{n}}}}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{neiz^{-1}}{2\sqrt{e+fz^{\frac{1}{n}}}}$. Donc $-\frac{2d}{n\epsilon} \odot$ est la fluente de $\frac{diz^{-1}}{\sqrt{e+fz^{\frac{1}{n}}}}$; car e est négatif dans le cercle.

Enfin si $\theta = 0$ dans la cinquième formule, on aura $\frac{dix^{1-n}-1}{\sqrt{e+fz^n}}$, & puisque $R = \sqrt{f}$, $S = \sqrt{\frac{e}{z^n}}$, & $T = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}} = \sqrt{e\frac{1}{z^n} + f}$, il s'ensuit que $\dot{T} = \frac{-enfz^{1-n}}{2\sqrt{e+fz^n}}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{-nfz^{1-n}}{2\sqrt{e+fz^n}}$, ou $\frac{-nfz^{1-n}}{2\sqrt{e+fz^n}}$. Par conséquent $\frac{1}{nf} \odot$ sera la fluente de $\frac{dix^{1-n}-1}{\sqrt{e+fz^n}}$, par ce que f est négatif dans le cercle.

Nous ajouterons quelques exemples pour faire une application des Tables aux cas particuliers.

I. Soit $\frac{ax}{\sqrt{aa-xx}}$ la fluxion proposée : en comparant cette fluxion avec la formule générale $\frac{dix^{1-n}-1}{\sqrt{e+fz^n}}$ de la cinquième Table, on aura $n = 2$, $\theta n + \frac{1}{2}n - 1 = 0$, ou $\theta = 0$, $-f = 1$, $e = aa$, $d = a$, $xx = z^n$; ainsi la fluente $\frac{1}{n}d \odot$ à côté de 0, donnera $-a \odot$ pour celle demandée ; & $R = \sqrt{f}$, $T = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$, deviendront $R = \sqrt{-1}$, $T = \sqrt{\frac{a-xx}{xx}}$. Ainsi $\odot$ est un arc de cercle dont le rayon est à la tangente, ou le cosinus est au sinus :: $R : T :: 1 : \sqrt{\frac{aa-xx}{xx}} :: x : \sqrt{aa-xx}$.

Il faut remarquer, puisque la fluente est négative, qu'il faut prendre l'arc correspondant au cosinus, & non pas au sinus.

II. Soit $\frac{ax^{1-n}}{\sqrt{ax-xx}}$ la fluxion proposée, laquelle étant comparée avec la troisième formule $\frac{dix^{1-n}-1}{\sqrt{e+fz^n}}$, donnera $n = 2$, $\theta n - 1 = -1$, ou $\theta = 0$, $e = aa$, $d = a$, $f = 1$, $xx = z^n$; ainsi la fluente $\frac{1}{n}d \odot$ à côté de 0, deviendra $-\frac{1}{a} \odot$, & $R = \sqrt{e}$, $S = \sqrt{fz^n}$, $T = \sqrt{e+fz^n}$, deviennent $R = a$, $S = x$, & $T = \sqrt{aa+xx}$. Donc $\odot$ est le logarithme de $\frac{a+\sqrt{aa+xx}}{x}$.

III. Soit $\frac{ax^3}{\sqrt{aa+xx}}$ la fluxion, laquelle étant comparée avec la cinquième formule $\frac{dix^{1-n}-1}{\sqrt{e+fz^n}}$, donnera $n = 2$, $\theta n + \frac{1}{2}n - 1 = 2$, ou $\theta = 1$, $e = aa$, $d = a$, $f = 1$, $xx = z^n$. Donc la

Fluente $\frac{x^2}{n f} dP - \frac{a}{n f f} d\odot$ à côté de l'unité, deviendra $\frac{a x}{2} \sqrt{a x + x x}$
 $-\frac{a^2}{2} \odot$; & comme $R = \sqrt{f} = 1$, $S = \sqrt{\frac{f}{x}} = \frac{a}{x}$, $T =$
 $\sqrt{\frac{f + f x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{a a + x x}{x x}}$, $\odot$ fera le logarithme du rapport de $\frac{a}{x}$ à
 $1 + \sqrt{\frac{a a + x x}{x x}}$, ou du rapport de a à $x + \sqrt{a a + x x}$.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire voir clairement
 au lecteur, & la construction & l'usage des Tables suivantes.
 On auroit pû en augmenter le nombre à l'exemple de M. Cotes;
 mais comme celles-ci suffisent pour ce qui suit, on a mieux aimé
 approfondir ce sujet dans le Traité des Quadratures.

θ	FORMULE I. $\frac{d(z^n - 1)}{e + fz^n}$.
5	$\frac{dz^{5n}}{5nf} - \frac{dez^{4n}}{3nff} + \frac{deez^{3n}}{2nf^2} - \frac{de^2z^{2n}}{nf^3} + \frac{de^3z^n}{nf^4} \text{ L M.}$
4	$\frac{dz^{4n}}{4nf} - \frac{dez^{3n}}{2nff} + \frac{deez^{2n}}{nf^2} - \frac{de^2z^n}{nf^3} \text{ L M.}$
3	$\frac{dz^{3n}}{3nf} - \frac{dez^{2n}}{nff} + \frac{deez^n}{nf^2} \text{ L M.}$
2	$\frac{dz^{2n}}{2nf} - \frac{dez^n}{nff} \text{ L M.}$
1	$\frac{dz^n}{nf} \text{ L M.}$
0	$\frac{dz^0}{ne} \text{ L M.}$
-1	$\frac{-dz}{neez} + \frac{df}{ne^2} \text{ L M.}$
-2	$\frac{-dz}{2neez^{2n}} + \frac{df}{ne^2ez} - \frac{dff}{ne^3} \text{ L M.}$
-3	$\frac{-dz}{3neez^{3n}} + \frac{df}{2neez^{2n}} - \frac{dff}{ne^3z} + \frac{df^2}{ne^4} \text{ L M.}$
-4	$\frac{-dz}{4neez^{4n}} + \frac{df}{3neez^{3n}} - \frac{dff}{2ne^3z^{2n}} + \frac{df^2}{ne^4z} - \frac{df^3}{ne^5} \text{ L M.}$

$L = \log. \frac{e + fz^n}{e} : l = \log. \frac{e + fz^n}{z^n} : M = 2, 50258. 50929. 54045. 684.$

FORMULE

θ	FORMULE II. $\frac{d(x^{1/n} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^n})}{e + \sqrt{x^n}}$.
4	$\frac{2dx^{7/n}}{7nf} - \frac{2dex^{1/n}}{5nff} + \frac{2dex^{1/n}}{3nf^3} - \frac{2de^3x^{1/n}}{nf^5} + \frac{2e^3}{nf^5} d\odot.$
3	$\frac{2dx^{1/n}}{5nf} - \frac{2dex^{1/n}}{3nff} + \frac{2dex^{1/n}}{nf^3} - \frac{2ee}{nf^5} d\odot.$
2	$\frac{2dx^{1/n}}{3nf} - \frac{2dex^{1/n}}{nff} + \frac{2e}{nff} d\odot.$
1	$\frac{2dx^{1/n}}{nf} - \frac{2}{nf} d\odot.$
0	$\frac{2}{ne} d\odot.$
-1	$\frac{-2d}{ne^3x^{1/n}} - \frac{2f}{nee} d\odot.$
-2	$\frac{-2d}{3ne^3x^{1/n}} + \frac{2df}{ne^3x^{1/n}} + \frac{2ff}{ne^3} d\odot.$
-3	$\frac{-2d}{5ne^3x^{1/n}} + \frac{2df}{3ne^3x^{1/n}} - \frac{2dff}{ne^3x^{1/n}} - \frac{2f^3}{ne^4} d\odot.$
-4	$\frac{-2d}{7ne^3x^{1/n}} + \frac{2df}{5ne^3x^{1/n}} - \frac{2dff}{3ne^3x^{1/n}} + \frac{2df^3}{ne^4x^{1/n}} + \frac{2f^5}{ne^5} d\odot.$

$$R = \sqrt{\frac{e}{f}}. T = \sqrt[1/n]{x}. S = \sqrt{\frac{e + \sqrt{f x^n}}{f}}. RDK = \odot, \text{ ou } L = \frac{R+T}{S}. RLM = \odot, K = 0, 01745. 31925. 19943. 290213.$$

0	FORMULE III. $\frac{d \dot{x} z^{10} - 1}{\sqrt{e + fz}}$
4	$\frac{-96e^3 + 48effz^2 - 36effz^{10} + 30fz^{10}}{105n^6} dP.$
3	$\frac{16ee - 8efz^2 + 6ffz^{10}}{15nf^3} dP.$
2	$\frac{-4e + 2fz^2}{3nff} dP.$
1	$\frac{2}{nf} dP.$
0	$\frac{-1}{ne} d\odot.$
-1	$\frac{-1}{ne^2} dP + \frac{f}{nee} d\odot.$
-2	$\frac{-1e + 3fz^2}{4neez^{10}} dP - \frac{3ff}{4ne^3} d\odot.$
-3	$\frac{-2ee + 10efz^2 - 15ffz^{10}}{24ne^3z^{10}} dP + \frac{1f^3}{8ne^4} d\odot.$
-4	$\frac{-49e^3 + 168effz^2 - 170effz^{10} + 105f^3z^{10}}{192e^4z^{10}} dP - \frac{31f^3}{64ne^5} d\odot.$

$$R = \sqrt{e}, P = T = \sqrt{e + fz^2}, S = \sqrt{fz^2}, RDK = \odot, \text{ ou }$$

$$L = \frac{R+T}{5}, RLM = \odot.$$

0	FORMULE IV. $dz \sqrt[n]{e+fz^n}.$
4	$\frac{-96e^4 + 48efz^n - 36effz^{1n} + 30f^2z^{2n} + 27of^4z^{4n}}{945nff^4} dP.$
3	$\frac{16e^3 - 8effz^n + 6efffz^{1n} + 30f^2z^{2n}}{105nfff} dP.$
2	$\frac{-4ee + 2efz^n + 6ffz^{1n}}{15nff} dP.$
1	$\frac{2e + 2fz^n}{3nf} dP.$
0	$\frac{2}{n} dP - \frac{2}{n} d\odot.$
-1	$\frac{-1}{nz^n} dP - \frac{f}{ne} d\odot.$
-2	$\frac{-2e - fzn}{4nee^{1n}} dP - \frac{ff}{4nee} d\odot.$
-3	$\frac{-8ee - 2efzn + 3ffz^{1n}}{24nee^{1n}} dP - \frac{f}{8ne^3} d\odot.$
-4	$\frac{-68e^3 - 8effz^n + 10efffz^{1n} - 15f^2z^{2n}}{192nee^{1n}} dP + \frac{5f^4}{64ne^4} d\odot.$

Les valeurs de $\odot$ sont de même que dans la Table précédente.

θ	FORMULE V. $\frac{d \sqrt{e^2 + f z^2} + \frac{1}{z^2} - 1}{\sqrt{e^2 + f z^2}}$
4	$\frac{-104e^3 z^2 + 70effz^{10} - 56ff^2 z^{10} + 48f^3 z^{10}}{192nf^3} dP + \frac{31e^4}{64nf^3} d\odot.$
3	$\frac{15eez^2 - 10effz^{10} + 8ff^2 z^{10}}{24nf^3} dP - \frac{5e^3}{8nf^3} dP - \frac{5e^3}{8nf^3} d\odot.$
2	$\frac{-3eez^2 + 2fz^{10}}{4nf^3} dP + \frac{3ee}{4nf^3} d\odot.$
1	$\frac{z^2}{nf} dP - \frac{e}{nff} d\odot.$
0	$\frac{z}{nf} d\odot.$
-1	$\frac{-z}{ne} dP.$
-2	$\frac{-ze + 4fz^2}{3nee z^2} dP.$
-3	$\frac{-6ee + 8effz^2 - 16ff^2 z^{10}}{15nee z^{10}} dP.$
-4	$\frac{-30e^3 + 36eeffz^2 - 48eff^2 z^{10} + 96f^3 z^{10}}{105nee z^{10}} dP.$

$$R = \sqrt{f}. P = T = \sqrt{\frac{e^2 + f z^2}{z^2}}. S = \sqrt{\frac{e}{z^2}}. RDK = \odot, \text{ ou}$$

$$L = \frac{R+T}{S}. LRM = \odot.$$

0	FORMULE VI. $d\dot{x} \dot{x}^{(n+\frac{1}{2})n-1} \sqrt{e+f\dot{x}^n}$.
3	$\frac{15ee^2 - 10effz^{1n} + 8efffz^{1n} + 45f^3z^{1n}}{192nf^3} dP - \frac{5e^4}{64nf^3} d\odot.$
2	$\frac{-3ee^2 + 2efz^{1n} + 8ffz^{1n}}{24nff} dP + \frac{e^3}{8nf} d\odot.$
1	$\frac{ee^2 + 2fz^{1n}}{4nf} dP - \frac{ee}{4nff} d\odot.$
0	$\frac{e^2}{n} dP + \frac{e}{nf} d\odot.$
-1	$\frac{-1}{n} dP + \frac{1}{n} d\odot.$
-2	$\frac{-1e - 1fz^n}{3ne^2} dP.$
-3	$\frac{-6ee - 2efz^n + 4ffz^{1n}}{15ne^2z^{1n}} dP.$
-4	$\frac{-30e^3 - 6ee^2fz^n + 8efffz^{1n} - 16f^3z^{1n}}{105ne^3z^{1n}} dP.$
-5	$\frac{-210e^4 - 30e^3fz^n + 36eeffz^{1n} - 48ef^2z^{1n} + 96f^3z^{1n}}{945ne^4z^{1n}} dP.$

Les valeurs de $\odot$ sont de même que dans la Table précédente.

PROBLEME VIII.

243. *Changer quelques expressions fluxionaires, dont les fluentes dépendent de la quadrature des sections coniques, en d'autres plus simples.*

Soient AC la sécante, BC la tangente, PG le sinus de l'arc BG décrit du centre A : soit tiré ML parallèle à AB, rencontrant PG en N, & la tangente GM en M ; soit d'un point D dans BC prolongée, comme centre, décrite la demi-circonférence de cercle HE, en sorte qu'elle touche la sécante AC prolongée en E ; du centre D soit tiré KD perpendiculaire à

CH, & DL perpendiculaire sur AK; soit enfin En perpendiculaire à CH. Cela posé, si MG exprime la fluxion de l'arc BG, MN sera celle du cosinus AP, NG celle du sinus PG; & si CD exprime la fluxion de la tangente BC, CE sera celle de la secante. C'est pourquoi la ressemblance des triangles donnera les proportions suivantes.

$\dot{z} : y :: \dot{y} : \dot{z}$ $\dot{z} : \dot{z} + y :: \dot{y} : \dot{y} + \dot{z}$	$\frac{dy}{z} = d \times \frac{y+z}{y+z}$
$\dot{z} : a :: \dot{y} : DE$ $GC : BG :: \dot{z} : CH$	$CH - CD = DH = DE$ $\frac{\dot{z}}{z-a} - \frac{\dot{y}}{y} = \frac{ay}{zy}$
$a : y :: \dot{z} : EL$ $a : \dot{z} :: \dot{y} : DL$	$EL + DL + DE = 2 DL$ $\frac{y+z}{a} + \frac{ay}{z} = \frac{2ay}{a}$
$\dot{z} : y :: \dot{z} : Cn$ $\dot{z} : a :: DE : Dn$	$DC - Dn = Cn$ $\dot{y} - \frac{ay}{z} = \frac{y\dot{z}}{z}$
$u : x :: \dot{x} : \dot{u}$	$\frac{1. a \dot{z}}{ux} = \frac{1. a \dot{z}}{xx} = \frac{1. a \dot{u}}{ax - uu}$ $= \frac{\dot{u}}{a+u} + \frac{\dot{u}}{a-u}$
$y : \dot{z} :: \dot{z} : \dot{y}$	$MG = * \frac{ay}{z} = \frac{ay\dot{z}}{zy}$
$y : a :: \dot{y} : DK$ $\dot{z} : a :: DK : KE$	$CE + EK = CK$ $\dot{z} + \frac{ay\dot{z}}{yz} = \frac{zy}{y}$
$x : u :: \dot{x} : NC$ $x : a :: \dot{u} : MG$ $x : a :: MG : MC$	$MC - MN = NC$ $\frac{ay\dot{z}}{xx} - \dot{u} = \frac{u\dot{z}}{x}$

* Art. 118.

* Art. 118.

Or sçachant que la fluxion d'un arc de cercle est égale au * produit du carré du rayon multiplié par la fluxion de la tangente divisée par le carré de la secante, & que la fluxion d'un logarithme est égale à * la fluxion du nombre de ce logarithme, divisée par le même nombre, on aura la Table des fluxions ci-après.

* Art. 118.

TABLES des Expressions logarithmiques.

	FLUXIONS.	FLUENTES.
I.	$\frac{\dot{x}}{y} = \frac{\dot{y}}{x} = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{x + y}$	$l^{\frac{y+x}{a}} = l \frac{a}{x-y}$
II.	$\frac{a\dot{y}}{yz} = \frac{a\dot{x}}{yz}$	$l^{\frac{x-a}{y}} = l \frac{y}{x+a}$
III.	$\frac{xyz\dot{x}}{xy} = \frac{x\dot{y}}{a}$	$\frac{yz}{1a} + \frac{a}{2} l^{\frac{y+x}{a}}$
IV.	$\frac{y\dot{y}}{xz} = \frac{y\dot{x}}{x}$	$y - B G.$
V.	$\frac{a\dot{x}}{ax} = \frac{a\dot{y}}{ay}$	$\frac{1}{2} l^{\frac{a+x}{a-y}} = l \frac{a+y}{x}$
VI.	$\frac{aa\dot{y}}{xz} = \frac{aa\dot{x}}{xy}$	$B G.$
VII.	$\frac{x\dot{y}}{y} = \frac{xx\dot{x}}{xy}$	$\frac{1}{2} + a l^{\frac{x-a}{y}}$
VIII.	$\frac{aa\dot{y}}{xz} = \frac{a\dot{x}}{x}$	$\frac{a}{2} l^{\frac{a+y}{a-y}} - x.$

N. B. Les fluentes devant lesquelles il y a une l , expriment les logarithmes de ces quantités ; par exemple $l^{\frac{y+x}{a}}$ exprime le logarithme de $\frac{y+x}{a}$, $\frac{a}{2} l^{\frac{y+x}{a}}$ exprime le logarithme de $\frac{y+x}{a}$ multiplié par la quantité $\frac{a}{2}$. Lorsqu'il y a deux fluentes l'une égale à l'autre, comme dans les nombres I, II, V, l'une ou l'autre est la fluente de la fluxion à côté. On a trouvé l'égalité des fluxions par le moyen de leurs rapports, & par la propriété des triangles semblables.

Dans les Tables ci-devant des fluentes, & dans tous les

cas où la fluente dépend de la quadrature des sections contigües, on peut toujours réduire les fluxions à quelques-unes des formules dont nous venons de donner les fluentes; ce qui fait que cette dernière Table est très-utile & épargne beaucoup de calcul que l'on seroit obligé de faire sans cela, comme on verra dans la suite.

SECTION II.

De la maniere de trouver les valeurs des superficies, surfaces & solides avec la rectification des courbes.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 150.

244. *T*rouver les fluxions des superficies, surfaces & solides.

I. Si l'on suppose que la ligne AE parallele à l'appliquée PM , se meut parallelement le long de AP , sa partie terminée par la courbe & l'abscisse AP , décrira la superficie AMP , pendant qu'elle-même décrit le rectangle $AEMP$. Cela posé, puisque la fluxion d'un espace quelconque Aap est égale à la quantité de mouvement avec laquelle la partie pa arrive dans la situation pe , & que pa , pe a par-tout la même vitesse, les fluxions des espaces Aap , Aep , seront entr'elles comme leurs quantités génératrices, ou comme les produits de ces quantités, chacune multipliée par leur vitesse commune, ou par la fluxion de Ap : or comme le produit de Ae , multiplié par sa vitesse, exprime la fluxion du rectangle Aep , il s'ensuit que le produit de pa multiplié par sa vitesse, exprimera aussi la fluxion de l'espace Aap correspondant.

Par conséquent la fluxion d'un espace quelconque AMP est exprimée par le produit de l'appliquée PM , multipliée par la fluxion de l'abscisse AP correspondante.

II. Si au lieu de pa , pe , on prend les surfaces décrites par ces lignes dans la révolution de la figure autour de l'axe AP , on prouvera de la même maniere que les fluxions des solides décrits par le mouvement parallele de ces surfaces, seront toujours entr'elles comme les surfaces génératrices.

Par

Par conséquent, la fluxion du solide décrit par la figure AMP en tournant autour de l'axe AP , sera égale au produit de la surface décrite par PM dans cette révolution, multipliée par la fluxion de l'abscisse AP .

III. En concevant que l'arc AM représente l'abscisse d'une figure curviligne, & que la circonférence décrite par le point M dans la révolution de la figure AMP autour de l'axe AP , représente l'appliquée correspondante; il est clair que l'espace décrit par cette circonférence dans un mouvement parallèle le long de cette abscisse, sera égal à la surface décrite par l'arc AM dans la révolution de la figure AMP autour de l'axe AP .

Donc la fluxion de la surface décrite par l'arc AM autour de l'axe AP , est égale au produit de la circonférence décrite par le point M dans cette révolution, multipliée par la fluxion de l'arc AM .

IV. Si l'on suppose que la droite AE tourne dans le plan de la figure autour du point A comme centre, il est évident que chaque point dans cette ligne aura une vitesse proportionnelle à sa distance au centre A . Ainsi les vitesses des différentes parties de cette ligne seront dans une progression arithmétique, & par conséquent leur somme sera égale à la plus grande multipliée par la moitié de leur nombre.

C'est pourquoi la fluxion de l'espace $AaMA$ décrite par la partie de AE , terminée par la courbe & le centre A , sera égale au produit de AM multipliée par la moitié de la vitesse du point M .

De ce qu'on vient de dire on peut tirer cette conclusion générale: Que la fluxion de toute quantité est égale à la somme des produits de toutes les parties des quantités génératrices, chacune multipliée par sa vitesse.

COROLLAIRE I.

245. Si $AP = EM = x$, $PM = CQ = y$, $CP = u$, on aura $A.yx$ pour la fluxion de l'espace AMP , & $B.xj$ pour la fluxion de l'espace AEM . Et si CA est constante, $QE \times j = ux - xj$ fera la fluxion du rectangle AQ , laquelle étant ajoutée à celle de l'espace AME , donnera $C.uj$ pour la fluxion de l'espace $CAMQ$.

COROLLAIRE II.

246. Si la partie $M\dot{N}$ de la tangente en M exprime la fluxion de l'arc AM , la perpendiculaire Nm sur PM prolongée, fera la fluxion de l'abscisse $*AP$, Mm celle de l'appliquée PM , & la perpendiculaire Ns sur AM exprime la vitesse circulaire du point $*M$, à l'égard du rayon AM . Cela posé, si la ligne Nm coupe AM en n , les triangles semblables MPA , Mmn , & Nsn donneront 1°. $PM : PA :: Mm : mn = \frac{x\dot{y}}{y}$, ou $Nm - nm = Nn = \dot{x} - \frac{x\dot{y}}{y}$. 2°. $AM : PM :: Nn : Ns$, ou $AM \times NS = y\dot{x} - x\dot{y}$. Par conséquent $D. \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{1}$ fera la fluxion de l'espace aMA .

* Art. 164.
165.

* Art. 132.

La différence entre les fluxions $x\dot{y}$, & $\frac{x\dot{y} + y\dot{x}}{1}$ de l'espace AMP & du triangle AMP , donnera la même chose.

Si le centre autour duquel la ligne AM tourne étoit placé en tout autre endroit de l'axe AP , on trouveroit toujours la même chose, puisqu'on auroit toujours les mêmes triangles semblables.

COROLLAIRE III.

247. Si r est le rayon de la circonférence c , $\frac{c}{2r}yy$ exprimera la surface décrite par PM dans la révolution de la figure autour de AP ; & ainsi $E. \frac{c}{2r}yy\dot{x}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace AMP dans cette révolution.

Par la même raison $F. \frac{c}{2r}uu\dot{y}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace $CA MQ$ autour de l'axe CB .

Et à cause que $\frac{c}{r}uy$ exprime la surface cylindrique décrite par la ligne PM dans la révolution de la figure AMP , autour de BC , il est clair que $G. \frac{c}{r}y u \dot{x}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace AMP dans cette révolution.

COROLLAIRE IV.

248. Si $\dot{v}$ exprime la fluxion de l'arc AM , on aura $H. \frac{c}{y}y\dot{v}$

pour la fluxion de la surface décrite par l'arc AM autour de l'axe AP , & $L. \frac{e}{r} u \dot{v}$ pour la fluxion de la surface décrite par cet arc autour de l'axe CP .

N. B. Lorsque les appliquées PM sont inclinées à l'axe AP , il faudra mettre dans la fluente, au lieu de l'abscisse AP , la perpendiculaire tirée de l'origine A , sur la plus grande appliquée PM , pour avoir la véritable valeur. Car c'est sur cette perpendiculaire qu'il faudroit prendre la fluxion ou la vitesse de la quantité génératrice.

P R O B L E M E.

249. *L'on demande la fluxion d'un arc quelconque AM , lorsque les appliquées PM sont perpendiculaires à leur axe AP .*

Nous avons prouvé * que la fluxion de l'appliquée est à celle de l'arc, comme l'appliquée est à la tangente. Or la sous-tangente

est $= y^{\frac{2}{3}}$; ainsi $\sqrt{yy + \frac{y^2}{3}}$, ou $\frac{2}{3} \sqrt{y^3 + x^3}$ sera là valeur de la tangente; & par conséquent $y : \frac{2}{3} \sqrt{y^3 + x^3} :: \dot{y} : \dot{v} = \sqrt{y^3 + x^3}$ = à la fluxion demandée.

Si par le moyen de l'équation de chaque courbe particulière, on trouve des expressions égales à celles que nous venons de trouver, & qui ne renferment qu'une quantité variable & des constantes, les fluentes de ces expressions donneront les valeurs des superficies, surfaces, solides, ou lignes courbes demandées.

E X E M P L E I.

250. *L'on demande les valeurs de l'espace AMP , & du solide Fig. 151. décrit par cette espace autour de l'axe AP , $x = y^m$ étant l'équation de la courbe.*

I. Si l'on multiplie la fluxion $x = m \dot{y} y^{m-1}$ de l'équation par y , on aura $A^* y \dot{x} = m \dot{y} y^m$ pour la fluxion de l'espace * Art. 245. AMP , dont la fluente * $\frac{m}{1+m} y^{m+1}$, ou son égal $\frac{m}{1+m} y x$, se- * L. Reg. ra la valeur demandée.

II. En multipliant la fluxion $x = m \dot{y} y^{m-1}$ par $\frac{e}{17} y y$, on aura * E. $\frac{e}{17} y y \dot{x} = \frac{me}{17} \dot{y} y^{m-1}$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace AMP autour de l'axe AP ; & par conséquent

S ij

dont la fluente $\frac{e}{x} \times \log. 1+x$, sera la valeur du solide décrit par l'espace BCMP autour de l'asymptote AR.

E X E M P L E I I.

252. L'on demande la valeur de l'arc AM, en supposant que Fig. 251. les appliquées PM sont perpendiculaires à l'axe AP, & que $x = y^m$ soit l'équation de la courbe.

Le carré de la fluxion $\dot{x} = m y^{m-1} \dot{y}$, qui est $m m y^2 y^{2m-2}$ étant ajouté à $\dot{y}^2$, donne $\dot{y}^2 + \dot{x}^2 = \dot{y}^2 + m m y^2 y^{2m-2}$. Ainsi $\dot{v} = y \sqrt{1 + m m y^{2m-2}}$ sera la fluxion de cet arc, laquelle * Art. 249. étant comparée avec $\delta z y^{n-1} \times e + f y^n$, donnera $n = 2 m$ * Art. 235. — 2, & $\theta n - 1 = 0$, ou $\theta = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m-1}$, $\theta + \pi = s = \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2m-1}$, & * $\frac{e^n + \pi^n}{n} = \frac{m}{2m-1}$. * Art. 238.

D'où l'on voit que si $\theta = \frac{1}{2m-1}$ est un nombre entier quelconque & positif, * la fluente sera toujours exprimée par $\frac{1}{2m-1}$ * Art. 236. termes : de même que si $\frac{m}{2m-1}$ est un nombre entier quelconque & positif, la fluente sera * toujours exprimée par $\frac{m}{2m-1}$. * Art. 239.

Si $\varepsilon = \frac{m}{2m-1}$, on aura $m = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$, & $\theta = \frac{1}{2m-1}$ donnera $m = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. C'est pourquoi la valeur de l'exposant m , provenant de la substitution d'un nombre entier quelconque & positif, au lieu de θ , ou de ε , dans l'une de ces dernières équations, sera telle que la fluente, ou la valeur de l'arc AM, pourra être exprimée par un nombre fini de termes.

Si par exemple $\theta = 1$, on aura $m = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi $x = y^{\frac{1}{\varepsilon}}$ sera l'équation de la seconde parabole cubique, & $y \sqrt{1+\frac{2}{y}}$ la fluxion de l'arc AM, dont la fluente est * $\frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{5} y^{\frac{1}{5}}$. Mais * II. Reg. lorsque $y = 0$, cet arc est aussi $= 0$; & comme il reste $+\frac{2}{5}$ dans la supposition de $y = 0$, il faut retrancher ce reste pour avoir la valeur complète $\frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{5} y^{\frac{1}{5}} - \frac{2}{5}$ de cet arc.

Lorsque $m = 2$, l'équation $x = y y$ sera celle de la parabole ordinaire, dont le parametre est l'unité; & $\dot{v} = y \sqrt{1 + 4 y y}$ sera la fluxion de l'arc AM; ou en nommant le parametre $2p$,

$v = \frac{1}{p} \sqrt{pp + yy}$. Ainsi si $z = \sqrt{pp + yy}$, on aura $v = \frac{1}{p}$; or comme cette fluxion se peut rapporter à la troisième expression logarithmique $\frac{z}{a}$, on aura $\frac{z}{p} + \frac{1}{1} l^{\frac{z}{p} + 1}$ pour la valeur de l'arc A M.

On peut aussi trouver la fluente de $\frac{1}{p} \sqrt{pp + yy}$, en la comparant avec $d z \frac{1}{z^{1-n}} \sqrt{e + f z^n}$, qui est le cas de la sixième Table des fluentes; lorsque $\theta = 0$, on aura $n = 2$, $f = 1$, $d = \frac{1}{p}$, $e = pp$, $yy = z^n$; ainsi la fluente $\frac{z}{n} dP + \frac{e}{n} d \odot$ à côté de zero, deviendra $\frac{z}{2p} + \frac{1}{1} p \odot$, en supposant $z = \sqrt{pp + yy}$, & $T = \sqrt{\frac{pp + yy}{yy}}$, $R = 1$, $S = \frac{1}{y}$; par conséquent $L = \frac{R + T}{S} = \frac{y + z}{p}$.

Lorsque $y = p$, on aura $z = p \sqrt{2}$, & $\frac{z}{p} = 1 + \sqrt{2}$, $= 2,4142135623$, dont le logarithme est 0,3827756852, qui étant multiplié par $M = 2$, 3025850929 donnera $\frac{1}{1} p \odot = p \times 0,4406867939$, auquel ajoutant le nombre $\frac{z}{2p} \sqrt{pp + yy} = p \times 0,7071067811$, on aura A M $= p \times 1,147793575$, &c.

Si $y = 2p$, on trouvera A M $= p \times 1,4789427$, &c.

N. B. La valeur de l'exposant m trouvée par le moyen de l'équation $m = \frac{2f}{1+z}$, donne les cas où la courbe A M est convexe vers la droite A P; & celle trouvée par le moyen de l'équation $m = \frac{1+z}{2f}$, ceux où elle est concave vers cette droite.

Car puisque le numérateur $2f$ est moindre que le dénominateur $1 + z$, l'exposant m sera moindre que l'unité; & ainsi la sous-tangente $= mx$ sera moindre que l'abscisse A P, ce qui ne peut être à moins que la courbe ne soit convexe vers A P. L'autre cas est le contraire de celui-ci.

Lorsqu'on ne peut pas exprimer la valeur de l'arc A M par un nombre fini de termes, ni la réduire à la quadrature des sections coniques, il faudra réduire $\sqrt{1 + mmy^{2m-2}}$ en une suite infinie, & trouver sa valeur par approximation.

E X E M P L E I I I.

253. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc A M autour de l'axe A P.*

Comme on a $\dot{v} = \sqrt{1 + m m y^{2m-1}}$ par l'article précédent, on aura * H $\frac{c}{r} y \dot{v} = \frac{c}{r} y \dot{y} \sqrt{1 + m m y^{2m-1}}$, pour la fluxion * Art. 248. de cette surface, laquelle étant comparée avec * $\dot{s} \frac{c}{r} y^{2m-1} \times$ * Art. 235. $\frac{c}{r} + f \frac{c}{r} y^{2m}$, donnera $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2m - 2$, $\theta n - 1 = 1$, ou $\theta = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m-2}$, $s = \frac{1+m}{2-2m} c$, $\left(\frac{2m-1}{2-2m}\right) = \frac{1+m}{2-2m} = t$, ou $m = \frac{1+t}{2}$, & $m = \frac{2t-1}{2t+1}$. C'est pourquoi les valeurs de l'exposant m provenant de la substitution des nombres entiers quelconques & positifs, au lieu de θ ou de t , dans ces dernières égalités, seront toujours telles que la fluente ou valeur de la surface peut être exprimée en un nombre fini de termes.

Si par exemple $\theta = 1$, l'égalité $m = \frac{1+t}{2}$ donnera $m = 2$, & la courbe A M fera la parabole ordinaire; & la fluente de $\frac{c}{r} y \dot{y} \sqrt{1 + 4 y y}$ sera par la seconde règle générale $\frac{c}{12r} \times \frac{1}{1 + 4 y y^2}$. Mais lorsque $y = 0$, cette surface est aussi $= 0$; & comme il reste dans ce cas $+\frac{c}{12r}$, on aura $\frac{c}{12r} \times \frac{1}{1 + 4 y y^2} - \frac{c}{12r}$ pour la fluente, ou valeur complete de la surface.

E X E M P L E I V.

254. *L'on demande la valeur du solide décrit par le segment Fig. 253. 254. elliptique, ou hyperbolique A M P, autour d'un premier diamètre A P.*

Soit A C = a , son conjugué C B = b , A P = x , & P M = y , on aura $\frac{a a}{b b} y y = 2 a x \mp x x$ pour l'équation, & * D. * Art. 246. $\frac{c}{2r} y y \dot{x} = \frac{b b c}{2 r a} \times \frac{2 a x \mp x x}{2 a x \mp x x}$ pour la fluxion du solide, dont la fluente sera $\frac{b b c x}{2 r a} \times a x \mp \frac{1}{2} x x$.

Lorsque A P = A C ($x = a$), & $b = r$, on aura $\frac{1}{3} a b c$ dans l'ellipse, & $\frac{1}{3} a b c$ dans l'hyperbole: d'où l'on voit que si A C, B C sont les axes, le dernier solide sera double du premier.

Puisque $\frac{cx}{r}$ exprime la circonférence de cercle du rayon A P, $\frac{c}{r}xy$ exprimera la surface décrite par P M autour de la tangente A T. Ainsi * G. $(\frac{c}{r}yxx) = \frac{bcxz}{ar} \sqrt{2ax \mp xx}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace A M P autour de la tangente A T, parce que $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax \mp xx}$.

Or la fluente de cette fluxion sera $\pm \frac{ac}{r} \times A M P \mp \frac{bc}{3ar} \times \frac{1}{2ax \mp xx^{\frac{3}{2}}}$.

On trouvera la même fluente par l'article 242.

Lorsque A P = A C ($x = a$), on aura $\frac{ac}{r} \times A C B M - \frac{abc}{3r}$ dans l'ellipse. Or la superficie du quart d'ellipse est à celle du quart de cercle dont le rayon est A C (a), comme b est à a ; & le quart de cercle étant * $= aa \times 0,78539816$, & $c = 3$, 141592653, lorsque $r = 1$; ainsi on aura $aa b \times 1,420203549$ pour la valeur du solide décrit par le quart d'ellipse.

E X E M P L E V.

255. L'on demande la valeur du secteur elliptique, ou hyperbolique C A M, exprimé en partie de la tangente A T (z).

Si la ligne C M, prolongée dans l'ellipse, rencontre la tangente en T, les triangles semblables C P M, C A T, donneront $y = \frac{uz}{a}$, dont la fluxion sera $\dot{y} = \frac{nz + xz}{a}$. C'est pourquoi en

* Art. 246. mettant ces valeurs de y & de $\dot{y}$ dans * D. $\frac{y^2 - yz}{2}$, on aura $\frac{nnz}{2a}$ pour la fluxion du secteur; ou à cause que $\pm \frac{nn}{2} y \dot{y} = aa - uu$, égal à $\pm \frac{nn}{2b} z \dot{z}$, parce que $y = \frac{nz}{a}$; on tirera $uu = \frac{aabb}{bb + zz}$, & par conséquent $\frac{nnz}{2a} = \frac{abbz}{2bb + zz}$ sera la fluxion du secteur.

* Art. 228. Or comme $\frac{bbz}{bb + zz}$ est la fluxion * d'un arc de cercle D, dont le rayon est b , & la tangente z , il est évident que * b D K fera la fluente de $\frac{bbz}{bb + zz}$, & par conséquent $\frac{1}{2} a b$ D K fera la valeur du secteur elliptique.

* Art. 232. Et comme $\frac{bbz}{bb + zz}$ peut être comparé avec la cinquième formule

mule $\frac{a^2}{xx}$ de la table des expressions logarithmiques, en supposant $a=b$, $u=z$, & $bb-zz=xx$.

Donc la fluente $\frac{1}{2} l \frac{a+z}{a-z}$ donnera $\frac{1}{2} l \frac{b+z}{b-z}$ pour celle de $\frac{b^2}{bb-zz}$; & ainsi, si $L = \frac{1}{2} l \frac{b+z}{b-z}$, * $\frac{1}{2} abML$ sera la valeur du * Art. 224. secteur hyperbolique.

On auroit trouvé la même chose en rapportant la fluxion ci-dessus au cas de la seconde Table, où $\theta=0$.

Si $z = \frac{1}{2} b$, on aura dans l'ellipse $b : \frac{1}{2} b$, comme le rayon est à la tangente = 5000000 de l'arc D, que l'on trouvera = $26^\circ 34' - \frac{143}{3653} = 26,565005$, & comme * $K=0,0174532$, * Art. 232 on trouvera $\frac{1}{2} abDK = ab \times 0,2318394$.

Dans l'hyperbole $\frac{b+z}{b-z} = 3$, dont le logarithme est 0,4771212547; & comme * $M=2,302585093$, on aura * Art. 224. $2LM=1,0986122886$, & $\frac{1}{2} abLM = ab \times 0,274653071$.

AUTREMENT.

Si dans l'ellipse on décrit une demi-circonférence aDA avec Fig. 152. n. 1. le rayon CA , & que l'on tire par les extrémités N, M , de l'appliquée PM , les droites CN, CM , rencontrant la tangente en t, T ; & par le point T la ligne TQ , parallèle à Ct , on aura $CA : CB :: (PN : PM :: At : AT ::) AC : AQ$. Ainsi $AQ = CB$. Et si du point A on tire Am perpendiculaire à TQ , on aura $(CA, \text{ou } CN : PN ::) CB : PM :: AQ : Am$. Et comme $AQ = CB$, on aura aussi $PM = Am$.

Mais si dans l'hyperbole l'appliquée PM rencontre l'asymptote en N , & que la tangente en A rencontre CM en T & l'asymptote en t , on aura $\overline{At}^2 : \overline{AT}^2 :: \overline{PN}^2 : \overline{PM}^2$, ou $\overline{At}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{AT}^2 : \overline{PM}^2$, ou * Art. 77.

Or comme la fluxion du triangle CAT est à la fluxion du secteur $CAM :: \overline{CT}^2 : \overline{CM}^2$, comme fig. 152. n. 1. $\overline{CT}^2 : \overline{CN}^2$, ou Fig. 152. n. 1. $\overline{CA}^2 :: \overline{QT}^2 : \overline{QA}^2$, & comme fig. 152. n. 2. $\overline{At}^2 - \overline{AT}^2 : (\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2)$, ou * Art. 75. $\overline{At}^2$; donc, puisque la fluxion du triangle ATC est $\frac{a^2}{2}$, & $At = b$ dans l'hyperbole, & $AQ = b$ dans l'ellipse,

on aura $bb \mp \frac{a^2}{2} : bb :: \frac{a^2}{2} : \frac{abb^2}{abb^2 \pm a^2}$ = à la fluxion du secteur CAM ,
T

E X E M P L E V I.

Fig. 153:154. 256. L'on demande la valeur de ce secteur exprimée en partie de l'appliquée P M.

La fluxion de l'équation $\pm \frac{aa}{bb}yy = aa - uu$, sera $\pm \frac{aa}{bb}$
 $y\dot{y} = -u\dot{u}$, ou $\pm \frac{aa}{bbu}y\dot{y} = -\dot{u}$; substituant cette valeur
 * Art. 246. dans la fluxion * $\frac{\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}b}{1}$ du secteur, elle deviendra $\frac{\frac{1}{2}u}{1} \times$
 $uu \pm \frac{aa}{bb}yy$, ou à cause que $uu \pm \frac{aa}{bb}yy = aa$, & $u = \frac{a}{b}$
 $\sqrt{bb \mp yy}$, cette fluxion deviendra $= \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{1 \sqrt{bb \mp yy}}$.

A U T R E M E N T.

Fig. 154. n. 1. La fluxion * $\frac{u \sqrt{bb \mp yy}}{1}$ du secteur C A M, est à la fluxion $\frac{1}{2} a \dot{y}$ du
 triangle C M A :: $u \pm \frac{yy}{b} : a :: * C A : C P$, ou comme C N :
 C P :: A Q : Q m dans l'ellipse, & comme A t : P N dans l'hyper-
 * Art. 255. bolé; & puisque * Q m = $\sqrt{bb - yy}$, & * P N = $\sqrt{bb + yy}$,
 * Ibid. on aura $\sqrt{bb \mp yy} : b :: \frac{1}{2} a \dot{y} : \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{1 \sqrt{bb \mp yy}}$ = à la fluxion du sec-
 teur.

Or comme $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{bb \mp yy}}$ est la fluxion d'un arc de cercle D, dont
 * Art. 233. le * rayon est b , & le sinus y , * b D K fera la fluente de
 * Art. 232. $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{bb \mp yy}}$; & par conséquent $\frac{1}{2} a b$ D K fera la valeur du secteur
 elliptique.

Et puisque $\frac{\frac{1}{2}y}{\sqrt{bb \mp yy}}$ est la fluxion du logarithme L de
 $\frac{b + \sqrt{bb \mp yy}}{b}$, par la première formule de la table des logarith-
 * Art. 224. mes, * $\frac{1}{2} a b$ M L fera la valeur du secteur hyperbolique.

Ou si l'on compare la fluxion $\frac{ab^{\frac{1}{2}}}{1 \sqrt{bb \mp yy}}$ avec $\frac{d \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}}$, qui est
 le cas de la cinquième Table où $\theta = 0$, on aura $d = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{1}$, $e =$
 $\frac{bb}{f}$, $f = \mp 1$, $n = 1$, $\gamma = y$. Ainsi la fluente $\frac{1}{n} \odot$ à côté de
 zero, deviendra $-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{1} \odot$ dans l'ellipse, & R (1) : T ($\frac{1}{2} \sqrt{bb \mp yy}$)

$y: \sqrt{bb-yy}$, comme le cosinus est au sinus, ou à cause que la fluente est négative, comme le sinus est au cosinus, & comme $R=1$, $\odot=KD$, la fluente $-\frac{ab}{2}\odot$ deviendra $\frac{1}{2}abKD$.

Mais dans l'hyperbole, on a $\frac{1}{2}ab\odot$, & $S:R+T::\frac{b}{y}:1+\frac{1}{y}$,
 $\sqrt{bb+yy}:b:y+\sqrt{bb+yy}$, ou $\frac{R+T}{S}=\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}$.

Si $y=b\sqrt{\frac{1}{3}}$, il est évident que l'arc D sera de 60° , ou le tiers de 180° égale 1, 04719755; donc $ab \times 0,52359877$ sera la valeur du secteur elliptique.

Or comme $\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{7}=2,1889010597$, dont le logarithme est 0,3402261315, qui étant multiplié par $\frac{1}{2}M=1,1512925465$, donnera $ab \times 0,3916998093$ pour la valeur du secteur hyperbolique.

COROLLAIRE.

De là il suit qu'on aura $CQM+\frac{1}{2}abLM=CAMQ$, Fig. 153-154, & $CPM-\frac{1}{2}abLM$ dans l'hyperbole, & $CQM+\frac{1}{2}abDK=CAMQ$, & $\frac{1}{2}abDK-CPM$ dans l'ellipse.

EXEMPLE VII.

258. Soit AME la cissoïde ordinaire dont la propriété est Fig. 155: que toute perpendiculaire PM sur l'axe AB est toujours une troisième proportionnelle à l'appliquée PN de son cercle générateur ANB, & de l'abscisse AP correspondante, c'est-à-dire on a toujours $PN:PA:PM$. L'on demande la valeur de l'espace AMP.

Si $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, on aura $PN=\sqrt{ax-xx}$, & $y=\frac{x^2}{\sqrt{ax-xx}}$ pour l'équation. Ainsi $y \dot{x}=\frac{xx\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$ sera

la fluxion de cet espace. Or comme $x\sqrt{ax-xx}$ est la fluxion de l'espace circulaire ANP, on trouvera par la formule générale de l'article 235, ou par l'article 242, ou bien par la troisième Table des fluentes dans le cas où $\theta=2$, que $3ANP-2x\sqrt{ax-xx}$ est la valeur cherchée.

Il y a à remarquer qu'il faut changer la fluxion $\frac{xx\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$ en celle-
 T ij

ci $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ax-xx}}$ en divisant le numérateur & le dénominateur par $x^{\frac{1}{2}}$, pour pouvoir la réduire aux formules des articles mentionnés.

Lorsque $AP = AB$ ($x = a$), on aura $2x\sqrt{ax-xx} = 0$; & par conséquent l'espace entier $AMEFB$, infiniment prolongé vers E , fera triple du demi-cercle générateur ANB .

E X E M P L E V I I I.

259. L'on demande la valeur du solide décrit par l'espace AMP autour de l'axe AP .

* Art. 147. Si $1r = a$, on aura * $E\left(\frac{cx}{r}y\dot{x}\right) = \frac{cx\dot{x}^3}{aa-ax} = \frac{aa\dot{x}\dot{x}}{a-x} - \frac{cx\dot{x}\dot{x}}{a} - cx\dot{x} - a\dot{x}$ pour la fluxion de ce solide; c'est pourquoi si $L =$

* Art. 124. $\log. \frac{a}{a-x}$, on aura * $aa\dot{x}LM - \frac{cx^3}{3a} - \frac{1}{2}cx\dot{x} - a\dot{x}$ pour la valeur cherchée.

* Art. 124. Si $x = \frac{a}{2}$, on aura $L = 0, 3010299957$, & comme * $M = 2, 30258509299, aa\dot{x} \times 0, 6931471805 - \frac{1}{2}aa\dot{x}$, ou $aa\dot{x} \times 0, 0794415415$, fera la valeur du solide. Lorsque $x = a$, la valeur de ce solide fera infinie.

E X E M P L E I X.

260. L'on demande la valeur du solide décrit par l'espace $PMEFB$ autour de l'asymptote BF .

Comme $y = \frac{xx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{x}{a-x} \sqrt{ax-xx}$, on aura $\left(\frac{c}{r}BP \times PM\right) = \frac{cx}{r} \sqrt{ax-xx}$ pour la surface décrite par PM , & $\frac{c}{r}x\dot{x}\sqrt{ax-xx}$ pour la fluxion du solide.

Or comme $\dot{x}\sqrt{ax-xx}$, ou $\dot{x}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}$ est la fluxion de l'espace circulaire ANP , laquelle étant comparée avec la formule $\theta \dot{x} \zeta^{(n-1)} \times e + f \zeta^n$ de l'article 142, donnera $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $f = -1$, $e = a$, $\zeta = x$, $\theta n - 1 = \frac{1}{2}$, ou $\theta = \frac{1}{2}$, & $\theta + \pi + 1 = s = 3$; & la fluente $\frac{\theta \dot{x}^s}{s f} P^{s+1} = \frac{e \dot{x}^s}{s f} F$ deviendra $G = \frac{ae}{2r} ANP - \frac{c}{3r} ax - xx^2$, parce que $F = ANP$, & $\theta = \frac{c}{r}$.

Si l'on suppose que le cercle générateur tourne autour d'une ligne qui passe par le point A, & qui soit perpendiculaire à BA, on aura $\frac{e}{r} A P \times P N$ pour la surface cylindrique décrite par PN, & $\frac{e}{r} x \times \sqrt{a x - x x}$ pour la fluxion du solide. Par conséquent ce solide est égal à celui ci-dessus.

Lorsque $A P = A B$ ($x = a$), l'un & l'autre de ces solides sera $= \frac{e}{2r} A N B$, ou $= \frac{1}{4} a c c$, en supposant $a = 2 r$.

E X E M P L E X.

261. L'on demande la valeur de l'espace P F A M de la logarithmique infiniment prolongée vers F A. *Fig. 152. n. 34*

On a trouvé * $a y = y x$ pour l'équation de cette courbe; * *Art. 201*; ainsi $y x$, ou son égal $a y$ sera la fluxion de cet espace, & $a y = T P \times P M$ sera la valeur demandée.

Si l'on tire Q N perpendiculaire à l'asymptote F Q, on aura $T P \times Q N - P M$, pour la valeur de l'espace N Q P M.

Si $r = a = T P$, on aura * $E. \frac{e}{2r} y y x = \frac{e}{2} y y$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace P F A M autour de l'asymptote F Q, & $\frac{e}{4} y y = \frac{e}{4} P M^2$ pour sa valeur. * *Art. 247*

Par conséquent $\frac{e}{4} Q N^2 - \frac{e}{4} P M^2$, sera la valeur du solide décrit par l'espace N Q P M.

Si la tangente M T = r , on aura $\frac{2y}{y} =$ à la fluxion de l'arc M A, dont la fluente par le septième cas de la table des expressions logarithmiques, sera $r + a l \frac{2y}{y}$.

E X E M P L E X I.

262. L'on demande la longueur de l'arc P V M de la spirale d'Archimede. *Fig. 152. n. 4*

Si l'on nomme x la vitesse circulaire du point M à l'égard du rayon P M, & $P M = y$, on aura $a x = y y$ pour l'équation, & la superperpendiculaire P K = $a = * \frac{2y}{x}$. Or si K M = r , l'arc cherché v , on aura $v = \frac{2y}{a}$, dont la fluente par le troisième

cas de la table des expressions logarithmiques sera $v = \frac{3x}{1.4} + \frac{a}{1} l^{\frac{2+x}{1}}$.

Fig. 153. n. 5.
* *Art. 204.* Si P V M est la spirale réciproque, la soutangente P T (a) * est constante; c'est pourquoi si la tangente T M = z , on aura $v = \frac{z}{y}$, dont la fluente par le septième cas de la même table sera $u = z + a l^{\frac{z-a}{y}}$.

Fig. 152. n. 6.
* *Art. 21.* Dans la parabole ordinaire, on a P K = * p ; & si K M = z , on aura $v = \frac{z}{p}$, dont la fluente sera $\frac{3z}{1.2} + \frac{1}{1} p l^{\frac{2+z}{p}}$, par le troisième cas.

E X E M P L E X I I.

Fig. 156.

263. Soit le cylindre droit L A a, coupé par un plan B D N b obliquement à sa base, & passant par le centre C du cercle B A b a, l'on demande la valeur de l'onglet B A D N b.

Il est évident que les sections communes de la surface de ce solide & des plans C A D, P M N perpendiculaires à la base, & dont les sections C A, P M, avec cette base, soient perpendiculaires sur le diamètre B b, formeront des triangles rectangles N M P, D A C, qui sont semblables. Cela posé, si C B = C A = a, b P = x, P M = y, & la hauteur du solide A D = b, on aura par la propriété du cercle $y = \sqrt{2ax - xx}$, & par les triangles semblables, C A : A D :: P M : M N = $\frac{b y}{a} = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - xx}$. Ainsi $\frac{1}{2} \times P M \times M N = b x \times \frac{b}{2a} x \times x$ sera la fluxion de la partie b N M P du solide; & la fluente $\frac{1}{2} b x x - \frac{b}{6a} x^3$ sa valeur; & lorsque $x = 2 a$, on aura $\frac{2}{3} a a b$ pour celle de l'onglet.

E X E M P L E X I I I.

264. L'on demande la valeur de la surface convexe de l'onglet.

Il est évident que le produit b x de M N ($\frac{b y}{a}$) multiplié par la

* *Art. 234.* fluxion * $\frac{a x}{y}$ de l'arc b M, sera la fluxion de cette surface. Ainsi b x sera la valeur de la partie b N M b; par conséquent 2 a b = 2 C B x A D, sera celle de la surface entière.

E X E M P L E X I V.

265. L'on demande la valeur de l'arc elliptique BM, terminé Fig. 153. par le second axe CB, & par une appliquée quelconque PM au premier CA.

En supposant $AC = 1$, on aura $*yy = bb \times 1 - uu$, ou $*Art. 121$
 $y = b \sqrt{1 - uu}$ pour l'équation, dont la fluxion $y = \frac{bbu}{\sqrt{1 - uu}}$,
 donnera $y^2 + u^2 = u^2 + \frac{bbuu^2}{1 - uu} = u^2 \times \frac{1 - uu + bbuu}{1 - uu}$, ou, en
 faisant $1 - bb = dd$, $v = u \sqrt{\frac{1 - dd uu}{1 - uu}}$, pour la fluxion de cet
 arc.

En réduisant $\sqrt{1 - dd uu}$ en une suite infinie *, cette flu- $*Art. 125$.
 xion deviendra $v = \frac{u}{\sqrt{1 - uu}} \times$ par $1 - \frac{1}{2} dd uu - \frac{1}{2.4} d^2 u^4 -$
 $\frac{1.3}{2.4.6} d^3 u^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} d^4 u^8 - \&c.$

Or si l'on considère $z \zeta^{n-1} \times e + f \zeta^n$, comme exprimant
 un des termes quelconques de cette fluxion, excepté son coeffi-
 cient, on aura $e = 1$, $-f = 1$, $n = 2$, $\zeta = u$, $\pi = -\frac{1}{2}$; &
 la fluente $*G = \frac{z^n}{nf} P^{n+1} - \frac{e}{f} F$, qui sera ici $G = \frac{u^2}{2} F -$ $*Art. 242$
 $\frac{u^2}{2} P$, (en supposant $P = \sqrt{1 - uu}$) exprimera la relation en-
 tre les fluentes de deux termes successifs quelconques. s est $* =$ $*Art. 242$
 $(\theta + \pi + 1) = \theta + \frac{1}{2}$, F la fluente de l'antécédent, & G celle
 du conséquent. Donc si A est la fluente du premier terme
 $\frac{u^2}{2}$, c'est-à-dire si A exprime un arc de cercle dont le
 rayon est $AC (1)$ & le sinus $CP (u)$, & B, C, D, E, F , &c.
 les fluentes des termes suivans. En mettant au lieu de θ les nom-
 bres $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c. au lieu de s ; les nombres $1, 2, 3, 4, 5$,
 &c. au lieu de G ; les lettres B, C, D, E, F , &c. & au lieu de
 F , les lettres A, B, C, D, E , &c. on trouvera

$$B = \frac{1}{2} A - \frac{u}{2} P.$$

$$C = \frac{1}{4} B - \frac{u^3}{4} P.$$

$$D = \frac{1}{6} C - \frac{u^5}{6} P.$$

$$E = \frac{7}{8} D - \frac{u^7}{8} P.$$

$$F = \frac{9}{10} E - \frac{u^9}{10} P. \&c.$$

$$a = \frac{1}{2} dd.$$

$$b = \frac{1}{4} a dd.$$

$$c = \frac{1}{6} b dd.$$

$$f = \frac{7}{8} c dd.$$

$$g = \frac{9}{10} f dd. \&c.$$

Et par conséquent $A - aB - bC - cD - fE - gF - \&c.$ sera la valeur cherchée de l'arc BM.

Lorsque $CP = CA$ ($u = 1$), on aura $P = \sqrt{1 - uu} = 0$, & par conséquent $A \times$ par $1 - \frac{dd}{1.2} - \frac{3d^3}{2.3.4.4} - \frac{5d^5}{3.3.4.4.6.6} - \frac{7d^7}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.$ sera la valeur du quart d'ellipse, & A sera $= 1, 57079632$, &c. c'est-à-dire un quart de cercle dont le rayon est l'unité.

E X E M P L E X V.

Fig. 154. 266. L'on demande la valeur de l'arc hyperbolique AM.

* Art. 12. Si $AC = 1$, on aura $*yy = bb \times uu - 1$ pour l'équation. En supposant $1 + bb = dd$, on trouvera de la même manière que dans l'ellipse, que $v = u \sqrt{\frac{dd \times u - 1}{uu - 1}}$, & en réduisant

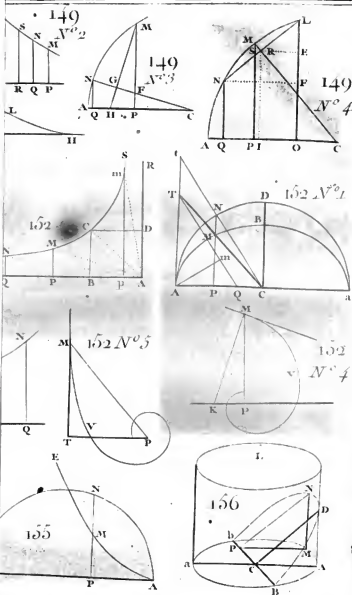
* Art. 215. $\sqrt{dduu - 1}$ en une suite * infinie, on trouvera $v = \frac{u}{\sqrt{uu - 1}}$ $\times$ par $du - \frac{1}{2du} - \frac{1.1}{2.4d^3u^3} - \frac{1.3}{2.4.6d^5u^5} - \&c.$ En supposant que A exprime la fluente du premier terme $\frac{u}{\sqrt{uu - 1}}$, c'est-à-dire $A = \sqrt{uu - 1}$, & B celle du second, ou un arc de cercle dont

* Tab. III. le rayon est CA (1), & la tangente $* = \sqrt{uu - 1}$, on aura

$A = \sqrt{uu - 1}.$	$a = \frac{1}{2d}.$
$C = \frac{1}{2}B + \frac{u-1}{2}A.$	$b = \frac{a}{4dd}.$
$D = \frac{1}{4}C + \frac{u-4}{4}A.$	$c = \frac{b}{6dd^3}.$
$E = \frac{1}{6}D + \frac{u-6}{6}A.$	$f = \frac{c}{8dd^5}.$
$F = \frac{7}{8}E + \frac{u-8}{8}A.$	$g = \frac{f}{10dd^7}.$

& $dA - aB - bC - fE - gF - \&c.$ pour la valeur cherchée de l'arc AM.

Car si l'on suppose que $\frac{1}{4}e + f\frac{1}{4}e^n$ exprime un terme quelconque de la fluxion, on aura $e = -1, f = 1, n = 2, \pi = -\frac{1}{2}, (\theta + \pi + 1) = s = \theta + \frac{1}{2}$; & la fluente * $G = \frac{1}{n}fP^{\pi+1} - \frac{e}{f}F$, qui sera ici $F = \frac{s}{\theta} G = \frac{n+1}{2\theta} A$, exprimera la relation





lation entre les fluentes de deux termes successifs quelconques, le premier excepté; G l'antecedent, & F son conséquent. Donc si l'on met au lieu de θ les nombres $1, -2, -3, -4, -5$, &c. & au lieu de s les nombres $-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$, &c. on aura la fluente comme l'on voit ci-dessus.

E X E M P L E X V I.

267. L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc Fig. 158. 159. elliptique BM autour de l'axe Aa.

Comme on a $*y = b \sqrt{1 - uu}$, & $\dot{v} = \dot{u} \frac{\sqrt{1 - dd uu}}{1 - uu}$; si b * Art. 264. $= r$, on aura $*H. (\frac{c}{r} y \dot{v}) = c \dot{u} \sqrt{1 - dd uu}$ pour la flu- * Ibid. xion de cette surface. Or si l'on prend dans le demi-axe CB la partie CD = CA, & que l'on décrive avec le demi-diametre, CD, & du centre C la demi-circonférence de cercle ADa, figure 158. lorsque Aa est le premier axe, ou une hyperbole équilatere NDn, figure 159. lorsque Aa est le second; & si après avoir fait CQ = du, l'on tire l'appliquée QN, on aura $\frac{c}{2} \times CQND$ pour la valeur cherchée.

Car lorsque Aa est le premier axe $*(1 - bb) = dd$ sera po- * Art. 6. sitif, ainsi $\dot{u} d \sqrt{1 - dd uu}$ sera la fluxion de l'espace circulaire CQND, figure 158.

Mais lorsque Aa est le second axe $(1 - bb) = dd$ sera négatif, & par conséquent $\dot{u} d \sqrt{1 + dd uu}$ sera la fluxion de l'espace hyperbolique CQND, figure 159.

Lorsque Aa est le premier axe, & que $u = 1 = AC$, on aura CQ = d, c'est-à-dire que le point Q tombe alors au foyer.

Si D exprime l'arc de cercle DN en degrés, on aura $*\frac{c u}{2}$ * Art. 132. $\sqrt{1 - dd uu} + \frac{c}{2d} KD$, pour la fluente de $c \dot{u} \sqrt{1 - dd uu}$, & si L est le logarithme de $du + \sqrt{1 + dd uu}$, $\frac{c u}{2} \sqrt{1 + dd uu} + \frac{c}{2d} LM$ * sera celle de $c \dot{u} \sqrt{1 + dd uu}$. * Art. 214.

E X E M P L E X V I I.

268. L'on demande la valeur de la surface décrite par la demi-ellipse aBA, autour de la tangente AT. Fig. 157.

Soit AP = LM = x, AC = a, on aura Ap = Lm =

V

$2a - x$; & si $r = a$, $\frac{e^x}{a}$ sera la circonférence du rayon LM , & $2c - \frac{e^x}{a}$ celle du rayon Lm , dont la somme $(\frac{e^x}{a} + 2c - \frac{e^x}{a})$ $2c$ étant multipliée par la fluxion $\dot{v}$ de l'arc AM , donnera $2c\dot{v}$ pour la fluxion des parties de cette surface décrite par les arcs am , AM . Ainsi $2c\dot{v}$ sera leur valeur, qui deviendra $2c \times$ par l'arc AMB , lorsque $x = a$.

E X E M P L E . X V I I I .

Fig. 160.

269. L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc hyperbolique AM autour de l'un des axes.

* Art. 248.

Si $r = b$, on aura * H. $(\frac{e}{r} y \dot{v}) = c \dot{u} \sqrt{dduu \mp 1}$ pour la fluxion de cette surface, parce que $y = b \sqrt{uu \mp 1}$. C'est pourquoy si l'on prend dans l'axe de révolution $CQ = du$, & que l'on tire l'appliquée QN , on aura $\frac{e}{2} ANQ$, ou $\frac{e}{2} CANQ$ pour la valeur demandée. Car $d\dot{u} \sqrt{dduu \mp 1}$ est la fluxion de l'espace ANQ lorsque c'est -1 , & de l'espace $CANQ$ lorsque c'est $+1$.

Lorsque l'arc AM tourne autour du premier axe AC , la surface devient zero lorsque $u = 1$, ($CP = CA$). Or comme on a alors $CQ = du = d$, le point Q tombera au foyer F . C'est pourquoy il faut retrancher l'espace $A EF$ pour avoir $\frac{e}{2} FENQ$ pour la valeur complete de cette surface.

Si L est le logarithme de $\frac{du + \sqrt{dduu \mp 1}}{d + \sqrt{dd \mp 1}}$, on aura $\frac{eu}{2} \sqrt{dduu \mp 1} \mp \frac{e}{2d} ML$ pour la valeur demandée. Lorsque l'hyperbole est équilatère, on aura $1 + b^2 = dd = 2$, & si $u = 2$, on aura $\sqrt{dduu - 1} = \sqrt{3} = 1,7320508756887$; & comme * M = 2, 30158509299, & $2d = 2f. 2 = 1, 82842709$; $L = 0, 7583100312$, & $LM = 1, 7460733737$. Ainsi ces valeurs étant substituées, donneront $\frac{eu}{2} \sqrt{dduu - 1} - \frac{e}{2d} LM = c \times 1, 1147206399$ pour la valeur demandée.

* Art. 214.

SECTION III.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

DEFINITIONS.

1. **S** I un corps étoit soutenu , ou suspendu par un point , tel que ce corps demeurât toujours en repos , de quelque manière que ses autres parties fussent situées à l'égard du centre de la terre ; ce point est nommé le *centre de pesanteur* , ou de *gravité* de ce corps.

2. Toute ligne horizontale qui passe par le centre de gravité d'un corps , est appelée *axe d'équilibre*.

3. La tendance , ou la force relative d'un corps vers la terre , eu égard à la distance de sa direction à l'axe de l'équilibre , est nommée le *moment* de ce corps.

DEMANDES.

I. Qu'on puisse prendre la gravité des corps comme constante dans une distance assez petite d'un même point de la surface de la terre.

II. Que les lignes ou directions dans lesquelles la gravité tend vers la terre , puissent être considérées comme parallèles entr'elles lorsqu'elles ne sont éloignées l'une de l'autre que d'une distance assez petite.

N. B. Comme la pesanteur des corps de la même densité est toujours proportionnelle à leurs masses ou volumes , & comme nous ne considérons que de tels corps dans ce qui suit , on prendra leurs masses au lieu de leurs pesanteurs.

Quoique les surfaces & lignes n'aient point de pesanteur , néanmoins comme leurs centres de gravité imaginaires sont d'une grande utilité , on considérera leur étendue comme des poids qui leur sont proportionnels de la même manière que dans les solides.

THEOREME I.

Fig. 161.

270. Si plusieurs corps P, Q, R, S, &c. sont attachés à une ligne AP, inflexible & sans pesanteur, & que cette ligne soit soutenue ou suspendue par un point G, tel que la somme des produits, des masses, chacune multipliée par la distance de son point de suspension au point G, d'un côté soit égale à la somme des produits pareils de l'autre, ces corps seront en équilibre, sçavoir si $P \times AG + Q \times BG = R \times GE + S \times GF$.

Il est évident que la force du corps P, à faire tourner la ligne AF autour du point G, augmente en proportion qu'il est attaché plus ou moins éloigné du point G, & cette force augmente aussi en proportion de sa pesanteur.

Donc la force absolue de ce corps, eu égard au point G, est comme $P \times AG$. Mais ce que nous venons de dire à l'égard du corps P, convient également à tout autre; il s'ensuit que la somme $P \times AG + Q \times BG$, exprime la force totale des corps P, Q, pour faire tourner la ligne AF d'un côté, & $R \times GE + S \times GF$, celle des corps R, S, pour la faire tourner de l'autre; & par conséquent ces forces étant égales, ces corps demeureront en équilibre.

COROLLAIRE.

271. De là il suit qu'il est clair que le point G est le centre de gravité commun des corps P, Q, R, S, &c. & que le moment d'un corps est égal au produit de sa masse multipliée par la distance de sa direction au point d'appui.

THEOREME II.

Fig. 162.

272. Si plusieurs corps P, Q, R, S, &c. sont fixés ensemble dans differens plans, la somme de tous les produits de chaque corps, multipliée par sa distance respective à un plan donné de position, sera égale à la somme de tous ces corps, multipliée par la distance de leur centre commun de gravité G à ce plan, s'ils sont tous placés du même côté, ou la différence de ces produits de ceux placés d'un côté à ceux de l'autre.

Par le centre de gravité G, qu'on fasse passer un plan horizontal dans lequel soit tirée la ligne Gg, ou Gd parallèle à l'intersection DT, ou DF de ce plan, & du plan dT, ou DF

donné de position ; de même des points P, Q, R, S, &c. où les directions des corps, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan horizontal, soient tirées les lignes PA, QB, RE, SF, &c. parallèles à DT, coupant DF en A, B, E, F, & d'G en a, b, e, f. Cela posé, si l'on considère la ligne Gg comme un axe d'équilibre, on aura $* P \times aG + Q \times bG = R \times eG + S \times fG$; ou à cause que $aG = DG - DA$, $bG = DG - DB$, $eG = DE - DG$, $fG = DF - DG$, ces valeurs étant substituées, donnent $P \times DA + Q \times DB + R \times DE + S \times DF = DG \times P + Q + R + S$, après avoir mis tous les produits où Dg entre dans un membre, & les autres dans l'autre.

Si à présent l'on considère la ligne Gd comme un axe d'équilibre, on aura $P \times Pa + R \times Re = Q \times Qb + S \times Sf$; ou à cause que $Pa = PA + Gg$, $Re = RE + Gg$, $Qb = QB - Gg$, $Sf = SF - Gg$, la substitution de ces valeurs changera l'égalité en celle-ci $- P \times PA + Q \times QB - R \times RE + S \times SF = Gg \times P + Q + R + S$, après la transposition des termes.

Il est clair que ce que nous venons de prouver à l'égard de quatre corps, conviendra aussi à tout autre nombre quelconque, même infini : donc si M exprime la somme des momens, S la somme des corps, & D la distance du centre de gravité à un plan donné de position, on aura $M = DS$, ou $D = \frac{M}{S}$. D'où l'on tire la règle suivante.

Règle générale pour trouver la distance du centre de gravité d'un corps à un plan donné de position.

E X E M P L E I.

273. Trouver la distance du centre de gravité d'un triangle Fig. 163i ABC, à la ligne TAT parallèle à sa base BC.

Si la ligne AE divise les parallèles MN, BC, par le milieu en P & E, on aura $AE(a) : BC(b) :: AP(x) : MN = \frac{bx}{a}$. Ainsi $\frac{bx}{a}$ sera la fluxion des poids, & $\frac{bx^2}{a}$ celle des momens, dont la fluente $\frac{bx^3}{3a}$ divisée par la somme des poids $\frac{bx^2}{2a}$, donnera $\frac{2}{3}x$; par conséquent lorsque $x = a$, on aura $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}AE$ pour la distance cherchée.

Puisque la ligne AE divise toutes les parallèles MN , CB par le milieu, il est clair que le centre de gravité sera dans cette ligne; par conséquent si $AG = \frac{1}{3} AE$, le point G sera le centre de gravité du triangle ABC .

COROLLAIRE.

Fig. 164.

274. Soit le quadrilatere $ABCD$ divisé en deux triangles, dont les centres de gravité soient E , F . Si l'on prend le point G dans la ligne EF , tel que l'aire du quadrilatere soit à celle d'un des triangles comme ABD , comme la ligne EF est à GF , le point G sera le centre de gravité du quadrilatere. Car si l'on considère les aires des triangles comme des poids suspendus aux points E , F , on aura $ABD : BCD :: GF : GE$; & en composant, $ABCD : ABD :: EF : GF$.

EXEMPLE II.

Fig. 165.

275. L'on demande la distance du centre de gravité de la demi-parabole BAE à la tangente TAT , & dont l'équation est $x = y^m$.

La fluxion $\dot{x} = m y y^{m-1}$ de l'équation $x = y^m$ étant multipliée par y , donne $y \dot{x} = m y y^m$ pour la fluxion des poids, & $y x \dot{x} = m y y^{2m}$ pour celle des momens, dont la fluente $\frac{m}{1+2m} y^{2m+1}$ divisée par la somme des poids $\frac{m}{1+m} y^{m+1}$, donne $(\frac{1+m}{1+2m} y^m) = \frac{1+m}{1+2m} x$ pour la distance demandée, en supposant $x = AE$.

Si l'on considère le poids $y \dot{x}$ appliqué au milieu de PM , on aura $(\frac{1}{2} y \times y \dot{x}) = \frac{m}{2} y y^{m+1}$ pour la fluxion des momens à l'égard de l'axe de balancement AE ; donc la fluente $\frac{m}{4+2m} y^{m+2}$ divisée par la somme des poids $\frac{m}{1+m} y^{m+1}$, donnera $\frac{1+m}{4+2m} y$ pour la distance du centre de gravité à l'axe AE .

Ainsi si l'on prend $AP = \frac{1+m}{1+2m} AE$, & la perpendiculaire $PG = \frac{1+m}{4+2m} EB$, le point G sera le centre de gravité de la demi-parabole, & le point P celui de la parabole entière.

COROLLAIRE.

276. Si l'exposant m est négatif, l'équation $x = y^{-m}$ sera *Fig. 158.* celle de toutes les hyperboles à l'infini : à l'égard des asymptotes AR , AT , & $\frac{1-m}{1+m}x$, $\frac{1-m}{4-1+m}y$ seront alors les valeurs des distances du centre de gravité ; la première, de l'espace $AR SMP$ à l'asymptote AR ; & la seconde, de l'espace $PMVT$ à l'asymptote AT . Car lorsque PM (y) augmente, cette distance augmente aussi, ce qui ne pourroit être à moins que ce ne soit celle de l'espace $PMVT$.

Lorsque $m = 1$, comme dans l'hyperbole ordinaire, l'une & l'autre de ces valeurs deviennent égales à zéro ; mais lorsque $2 = m$, $1 = 2m$, l'une & l'autre deviennent infinies, ce qui fait voir qu'on ne peut avoir les distances demandées dans ces cas.

On peut néanmoins avoir la distance du centre de gravité de quelques parties de ces espaces ; comme par exemple, si $AB = 1$, $BP = x$, on aura $\frac{x}{1+x}$ pour la fluxion des poids dans l'hyperbole ordinaire, & $\frac{x}{1+x} \times 1+x$, ou x pour la fluxion des momens à l'égard de l'axe AR . Par conséquent si z est la fluente de $\frac{x}{1+x}$, ou la valeur de l'espace $BCMP$, on aura $\frac{x}{z}$ pour la distance demandée ; mais lorsque $x = z = 0$, cette distance doit être $= AB = 1$; donc $1 + \frac{x}{z}$ est cette distance.

EXEMPLE III.

277. L'on demande la distance du centre de gravité du solide *Fig. 165.* décrit par l'espace AEB autour de AE , au sommet A .

On aura $\frac{mc}{1+r} y^{m+1}$ pour la fluxion des poids, & $\frac{mc}{1+r} y^{1+m+1}$ *Art. 250. m* pour celle des momens, parce que $x = y^m$, dont la fluente $\frac{m}{1+m} \times \frac{c}{1+r} y^{1+m+1}$ divisée par la somme des poids $\frac{m}{1+m} \times \frac{c}{1+r} y^{m+1}$, donnera $\frac{1+m}{1+m} x$ pour la distance cherchée.

Lorsque $m = -1$, comme dans l'hyperbole ordinaire, cette distance devient infinie, au lieu d'être $= 0$, ce qui est une contradiction, à moins que cette distance ne soit prise de l'extrémité T de l'asymptote AT .

EXEMPLE IV.

Fig. 166.

278. L'on demande la distance du centre de gravité d'un arc de cercle MAM à la ligne TCT, qui passe par le centre C, & qui est parallèle à la corde MM.

Il est évident que ce centre est dans quelques points du rayon CA qui divise cet arc en deux également ; c'est pourquoi si la parallèle mm à MM rencontre le rayon CA en p, & l'arc en m, m ; & si CA = a, Cp = x, pm = y, l'arc Am = z, on aura 2z pour la fluxion des poids, & 2z x pour celle des momens : or par la nature du cercle * $z = \frac{ay}{x}$, ou 2xz = 2ay ; par conséquent 2ay divisé par 2z, donnera $\frac{ay}{x}$ pour la distance chetchée, en supposant y = PM, & z = AM.

* Art. 241.

COROLLAIRE.

279. De là il suit que l'arc MAN est à sa corde MM, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de cet arc au centre C. Par conséquent la demi-circonférence est au diamètre, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de la demi-circonférence au centre C.

EXEMPLE V.

280. L'on demande la distance du centre de gravité du secteur CMA M au centre C.

Du centre C avec un rayon à volonté, soit décrit l'arc de cercle NBN, & soit tirée la corde NN, coupant le rayon AC en Q : cela posé, si CN = CB = x, CA = a, MM = b, l'arc MAM = c, on aura la corde NN = $\frac{bx}{a}$, & l'arc NBN = $\frac{cx}{a}$: de même * $\left(\frac{CN \times NN}{NBN} \right) = \frac{bx}{c}$ pour la distance du centre de gravité de l'arc NBN. Ainsi l'arc NBN $\frac{cx}{a}$ multiplié par la fluxion x de CB donnera $\frac{cx^2}{a}$ pour la fluxion des poids ; & comme la somme des poids multipliée par la distance de leur centre commun de gravité, est égale * à la somme des momens, on aura $\frac{bx}{c} \times \frac{cx^2}{a}$, ou $\frac{bx^2}{a}$ pour la fluxion des momens, dont la

* Art. 278.

* Art. 271.

fluente

fluente $\frac{bx^3}{3a}$, divisée par la somme des poids $\frac{cx}{2a}$, donnera $\frac{2bx}{3c}$, & lorsque $x = a$, $\frac{2ab}{3c}$ pour la distance cherchée.

COROLLAIRE.

281. De là il suit que l'arc MAM est à sa corde MM, comme $\frac{2}{3}$ AC est à la distance du centre de gravité du secteur CAM au centre C; & la demi-circonférence est au diamètre, comme $\frac{2}{3}$ AC est à la distance du centre de gravité du demi-cercle au centre C.

EXEMPLE VI.

282. L'on demande la distance du centre de gravité d'un espace Fig. 153-154 elliptique ou hyperbolique CAMQ au premier axe AC.

Puisque $\pm \frac{a}{b} y y = a a - u u$, on aura $u = \frac{a}{b} \sqrt{b b \mp y y}$; * Art. 12.
 & $(u y) = \frac{a y}{b} \sqrt{b b \mp y y}$ pour la fluxion des poids, & $(C Q \times u y) = \frac{a y^2}{b} \sqrt{b b \mp y y}$ pour celle des momens, dont la fluente complete sera $\mp \frac{a}{3b} \times \overline{b b \mp y y}^{\frac{3}{2}} \pm \frac{a b b}{3}$; & si la fluente de $\frac{a y}{b} \sqrt{b b \mp y y}$, ou la valeur de l'espace CAMQ est $= z$, $\mp \frac{a}{3bz} \times \overline{b b \mp y y}^{\frac{3}{2}} \pm \frac{a b b}{3c}$ sera la valeur de la distance demandée.

Lorsque $y = b$, on aura $\frac{a b b}{3c}$ dans l'ellipse; ou si c exprime la circonférence du rayon CA (a), on aura $z = C B M A = \frac{b c}{3}$; & par conséquent $\frac{2 a b}{3 c}$ sera la distance du centre de gravité du quart d'ellipse au premier axe AC.

EXEMPLE VII.

283. L'on demande la distance du centre de gravité du solide décrit par l'espace CAMQ autour du second axe BC au premier axe AC.

Si $r = a$, on aura $\ast \frac{a c y}{2 b b} \times \overline{b b \mp y y}$ pour la fluxion des poids, * Art. 214.
 & $\frac{a c y^2}{2 b b} \times \overline{b b \mp y y}$ pour celle des momens, dont la fluente

$\frac{acy}{4bb} \times \overline{bb \mp \frac{1}{3}yy}$ divisée par la somme des poids $\frac{acy}{2bb} \times \overline{bb \mp \frac{1}{3}yy}$, donnera $\frac{1}{4} \times \frac{2bb \mp y^2}{3bb \mp y^2}$ pour la distance demandée.

Lorsque $y = b$, on aura $\frac{1}{8} b$ pour cette distance dans le cercle ellipse, & $\frac{5}{16} b$ dans l'hyperbole.

EXEMPLE VIII.

Fig. 157.

284. L'on demande la distance du centre de gravité de la surface décrite par l'arc elliptique BM autour de l'axe Aa à l'axe CB.

* Art. 267.

On aura $*c u \sqrt{1 \mp ddu}$ pour la fluxion des poids, & $c u u \sqrt{1 \mp ddu}$ pour celle des momens, dont la fluente complete sera $\pm \frac{e}{3dd} \mp \frac{e}{3dd} \times \overline{1 \mp ddu}^{\frac{3}{2}}$. Et si la fluente de $c u \sqrt{1 \mp ddu}$, ou la valeur de la surface décrite par BM = z , on aura $\pm \frac{e}{3ddz} \mp \frac{e}{3ddz} \times \overline{1 \mp ddu}^{\frac{3}{2}}$ pour la distance demandée.

* Art. 265.

Lorsque $u = 1$, on aura $1 \mp ddu = 1 \mp dd = *bb$; & par conséquent $\pm \frac{e}{3ddz} \mp \frac{eb^3}{3ddz}$ pour la distance chetchée.

EXEMPLE IX.

Fig. 160.

285. L'on demande la distance du centre de gravité de la surface décrite par l'arc hyperbolique AM autour de l'un des axes CA, ou CB au centre C.

* Art. 269.

On aura $*c u \sqrt{dduu \mp 1}$ pour la fluxion des poids, & $c u u \sqrt{dduu \mp 1}$ pour celle des momens, dont la fluente complete sera $\frac{e}{3dd} \times \overline{dduu \mp 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{eb^3}{3dd}$, parce que lorsque $u = 1$,

* Art. 266.

on aura $*dd \mp 1 = bb$, & la fluente doit être = 0 dans ce cas. Or si la fluente de $c u \sqrt{dduu \mp 1}$, ou la surface est = z . $\frac{e}{3ddz} \times \overline{dduu \mp 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{eb^3}{3ddz}$ fera la valeur de la distance cherchée.

E X E M P L E X.

286. *L'on demande la distance du centre de gravité de la par-* Fig. 156.
tie b N M P de l'onglet, à la tangente de la base en b.

On aura * $\frac{b^2}{2a} \times 2ax - xx$ pour la fluxion des poids, & $\frac{bx^2}{2a}$ * Art. 263.
 $\times 2ax - xx$ pour celle des momens, dont la fluente divisée
par les poids donnera $\frac{3ax - 3xx}{2a - 4x}$ pour la valeur de la distance de-
mandée, laquelle devient $\frac{5a}{8}$ lorsque $x = a$; à cause que la
ligne tirée du centre de gravité de l'un des triangles semblables
quelconques P M N, C A D, parallèle au côté N M, ou D A,
rencontre la base de ce triangle à une distance égale aux $\frac{2}{3}$ de
cette base; il est évident que $\frac{b^2}{2a} \times 2ax - xx$ multipliée par ($\frac{2}{3}$
P M) = $\frac{1}{3} \sqrt{2ax - xx}$, donnera $\frac{b^2}{3a} \times 2ax - xx^{\frac{1}{2}}$ pour la flu-
xion des momens, à l'égard de l'axe B b. C'est pourquoi si z
exprime la fluente de $\sqrt{2ax - xx}$, ou l'espace b M P, on
aura $\frac{b}{2a} \times$ par $\frac{3axz}{4} - \frac{a - x}{4} \times 2ax - xx^{\frac{1}{2}}$ pour la somme des mo-
mens; & $\frac{b}{2a} \times axx - \frac{1}{2}x^2$ pour la somme des poids, on aura
 $\frac{3z}{4a}$, lorsque $x = a$, pour la distance demandée de la moitié
C A D N b de l'onglet.

R E M A R Q U E.

On observera en passant une propriété considérable du centre
de gravité, qui est que toute surface décrite par la révolution
d'une ligne décrite dans un plan autour d'un axe, ou d'un solide
décrit par une surface plane autour d'un axe, est toujours égal
au produit de la quantité génératrice multipliée par la circon-
férence de cercle décrite par le centre de gravité dans cette ré-
volution.

Car si A P = x , P M = y , on aura $f.y \times$ pour le plan géné- Fig. 157.
rateur du solide, & $f.\frac{1}{2}y y \times$ pour les momens; donc $\frac{f.\frac{1}{2}y y \times}{f.y \times}$ ex-
primera la distance du centre de gravité de l'espace A M P à
l'axe de révolution A P, laquelle étant multipliée par $\frac{e}{r}$, donne

X ij

$\frac{e}{r} \times \frac{f \cdot \frac{1}{2} y y \dot{x}}{f \cdot y \dot{x}}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité. Par conséquent cette circonférence étant multipliée par le plan générateur $f \cdot y \dot{x}$, donnera $f \cdot \frac{e}{r} y y \dot{x}$ pour la valeur du solide décrit par l'espace A M P autour de l'axe A P.

Soit l'arc A M $= v$, on aura v pour la fluxion des poids, & $y \dot{v}$ pour celle des momens, à l'égard de l'axe A P. Donc $\frac{f \cdot y \dot{x}}{v}$ fera la distance du centre de gravité de l'arc A M à l'axe A P. Ainsi la circonférence de cercle $\frac{e}{r} \times \frac{f \cdot y \dot{x}}{v}$ étant multipliée par la quantité génératrice v , donnera $f \cdot \frac{e}{r} y \dot{v}$ pour la valeur de la surface décrite par l'arc A M autour de A P.

SECTION IV.

Des centres d'oscillation & de percussion.

DEFINITIONS.

1. **UN pendule simple** est celui qui n'est que d'un corps considéré comme un point ; & un *pendule composé*, est composé de plusieurs corps joints ensemble, de manière que l'un ne se peut mouvoir sans l'autre.
2. La *ligne* qui passe par le centre de gravité d'un pendule composé, & par le point de suspension, est appelée l'*axe du pendule*.
3. La *ligne* qui passe par le point de suspension, & autour de laquelle se font les oscillations, est nommée l'*axe de balancement*, ou d'*oscillation*.
4. On dit que deux pendules sont *isochrones*, lorsqu'ils font un même nombre de vibrations dans le même tems.
5. Le centre d'oscillation est un point dans l'axe d'un pendule composé, dont la distance au point de suspension est égale à la longueur d'un pendule simple auquel il est isochrone.
6. Si l'on conçoit chaque particule d'un corps multipliée par sa vitesse, comme autant de poids appliqués en différens points

de l'axe du pendule, leurs pouvoirs relatifs à faire tourner le pendule, eu égard à leur distance à l'axe de balancement, sont appellés les *forces* de ces particules.

COROLLAIRE.

287. Il est évident que la force de chaque particule dépend *Fig. 167* de sa gravité, de sa vitesse & de sa distance à l'axe de balancement : donc si l'on considère les particules A, B, C, &c. chacune multipliée par sa vitesse, comme des poids P, Q, R, &c. appliqués en A, B, C, &c. en sorte que DA, DB, DC, soient leurs bras de leviers ou distances à l'axe de balancement D; il est clair qu'il arrive la même chose ici à l'égard du centre d'oscillation O, ce qui arrive à l'égard du centre de gravité, c'est-à-dire que la somme des produits de chaque poids P, Q, R, multipliée par sa distance, est égale à la somme des poids multipliée par la distance DO du centre d'oscillation au point de suspension.

PROBLEME GENERAL.

288. *Trouver la distance du centre d'oscillation O d'un pendule composé DABC au point de suspension D, en supposant que les particules A, B, C soient placées dans le plan dans lequel se font les oscillations.*

Soient tirées les lignes AP, BQ, CR, perpendiculaires à l'axe DO du pendule, & la ligne Aa perpendiculaire à AD : cela posé, à cause que la ligne Aa est la direction de la particule A, ce sera la même chose que si cette particule étoit placée en A, ou en a, pourvu qu'elle ait la même direction & la même vitesse. Or si l'on prolonge Aa jusqu'en b, en sorte que ab soit = AD, & que l'on tire bc parallèle, & AC perpendiculaire à l'axe DO, l'effort ou moment DA × A de la particule A dans la direction ab, fera à son effort relatif à celui avec lequel elle fait tourner le pendule dans la direction ac, comme ab, ou DA est à ac, c'est-à-dire = A × ac; & ce moment étant multiplié par sa distance Da, donnera A × ac × Da pour la force de cette particule. Mais puisque DA = ab, les triangles DAP, abc, étant semblables, on aura ac = DP, & DP : DA :: DA : Da, ou $\overline{DA}^2 = DP \times Da = Da \times ac$. Par

conséquent $(A \times ac) = A \times DP$, & $(A \times ac \times Da) = A \times \overline{DA}^2$.

Par la même raison $B \times DQ$, & $C \times DR$, seront les momens des particules B & C, & $B \times \overline{DB}^2$, $C \times \overline{DC}^2$ leurs forces. Or comme la somme des momens multipliée par la distance DO , doit * être égale à la somme des forces, on aura donc $A \times \overline{DA}^2 + B \times \overline{DB}^2 + C \times \overline{DC}^2 = DO \times$ par $A \times DP + B \times DQ + C \times DR$; ou en nommant F la somme des forces, & M la somme des momens, on aura $DO = \frac{F}{M}$.

Ce qui vient d'être dit à l'égard des trois particules, convient également à tout autre nombre, même infini; car on prouvera toujours que la somme des forces divisée par la somme des momens, est égale à la distance du centre d'oscillation au point de suspension.

S'il y avoit quelques particules placées de l'autre côté du point de suspension à l'égard des autres, on prouvera de la même manière que ci-dessus, que la différence entre les forces des particules d'un côté à celle des autres de l'autre, divisée par la somme des momens, sera toujours égale à la distance du centre d'oscillation au point de suspension.

Règle générale pour trouver la distance du centre d'oscillation d'un pendule à l'axe de balancement.

Divisez la somme des produits des particules chacune multipliée par le carré de sa distance à l'axe de balancement, si elles sont toutes du même côté; ou la différence de ces produits des particules d'un côté, & celles de l'autre, s'il y en a placées de part & d'autre, par la somme des momens, le quotient exprimera la distance cherchée.

EXEMPLE I.

Fig. 163.

289. Trouver la distance du cercle d'oscillation d'un triangle ABC, qui balance autour de l'axe TAT, qui passe par le sommet A parallèlement à la base BC.

* Art. 173.

On aura * $\frac{bxx}{a}$ pour la fluxion des momens, laquelle étant multipliée par la distance x , donnera $\frac{bx^2}{a}$ pour celle des forces,

dont la fluente $\frac{bx^4}{4a}$ divisée par les momens $\frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{1}{3}x$. Ainsi $\frac{1}{3}AE$ fera la distance cherchée.

E X E M P L E I I.

290. Trouver la distance du centre d'oscillation de la parabole BAC , qui balance autour de la tangente TAT , parallèle à la base BC , au point de suspension A . Fig. 165.

Soit $x = y^m$ l'équation, on aura $y \dot{x} = m \dot{y} y^{2m}$ pour la fluxion des momens, & $(y \dot{x} \times x) = m \dot{y} y^{2m+1}$ pour celle des forces, dont la fluente $\frac{m}{1+3m} y^{3m+1}$ divisée par les momens $\frac{1+m}{m} y^{2m+1}$, donnera $\frac{1+2m}{1+3m} y^m$, ou $\frac{1+2m}{1+3m} x$ pour la distance demandée, en supposant $x = AE$.

Si $m = 2$, on aura $\frac{1}{3}AE$ dans la parabole ordinaire pour cette distance; si m est négatif, on aura $\frac{1-2m}{1-3m} x$, qui devient zero lorsque $1 = 2m$, & infini lorsque $1 = 3m$. Mais lorsque $m = 1$, on aura $\frac{1}{3}AE$ dans l'hyperbole ordinaire.

E X E M P L E I I I.

291. Supposons à présent que la parabole BAC balance autour de la base BC .

Si $AE = a$, on aura $(EP \times \dot{x} y) = a - y^m \times m \dot{y} y^m$ pour la fluxion des momens, & $a - y^m \times m \dot{y} y^m$ pour celle des forces, dont la fluente sera $\frac{am}{1+m} y^{m+1} - \frac{2am}{1+2m} y^{2m+1} + \frac{m}{1+3m} y^{3m+1}$; & les momens seront $= \frac{am}{1+m} y^{m+1} - \frac{am}{1+2m} y^{2m+1}$; & lorsque $x = a = y^m$, on aura $\frac{2m}{1+3m} AE$ pour la distance cherchée, laquelle devient $\frac{1}{3}AE$ dans la parabole ordinaire.

E X E M P L E I V.

292. Soit $AMaM$ un cercle qui balance autour de l'axe TT perpendiculaire au diamètre Aa dans le plan du cercle. Fig. 170.

Si $AD = d$, $Aa = 2a$, $AP = x$, on aura $PM = y = \sqrt{2ax - xx}$, & $d+x \times \sqrt{2ax - xx}$ sera la fluxion des momens, & $d+x \times \sqrt{2ax - xx}$ celle des forces. C'est pour-

* Art. 141.

quoi si z exprime la fluente de $\sqrt{2ax - xx}$, ou la valeur de l'espace AMP , on aura $* d d z + \frac{1}{2} a a z + 2 a d z - \frac{1}{2} d y^2 - \frac{1}{2} x y^2 - \frac{1}{12} a y^3$ pour les forces, & $d z + a z - \frac{1}{2} y^2$ pour les momens, parce que $y = \sqrt{2ax - xx}$. Et lorsque $x = a$, y sera $= 0$; & par conséquent les forces divisées par les momens, donnent $\frac{4dd + 2aa + 8ad}{4a + 4d}$ pour la distance cherchée.

L E M M E I.

Fig. 171.

293. Soit AB a un demi-cercle, BC un rayon perpendiculaire au diamètre Aa ; & coupant la parallèle MM à Aa en P , je dis que la somme de tous les produits des quarrés $\overline{DP}^2$ des lignes tirées d'un point donné D dans Aa , chacun multiplié par l'élément correspondant de l'arc AM , sera $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{2} AC^2 \times$ par l'arc AMB .

* Art. 134.

Car si $AC = a$, $CD = d$, $CP = x$, l'arc $AM = z$, $AMB = c$, on aura $* z = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - xx}}$, & $\overline{DP}^2 \times z = d d z + x x z$,

* Art. 142.

dont la fluente est $* d d z + \frac{1}{2} a a z - \frac{1}{2} a x \sqrt{a a - x x}$, laquelle devient $= d d c + \frac{1}{2} a a c$, lorsque $z = c$, & $x = a$.

L E M M E II.

294. La somme des produits de tous les quarrés $\overline{DP}^2$ chacun multiplié par l'élément correspondant de l'espace $CPMA$, sera $= d d n + \frac{1}{2} a a n$, en supposant n égal à l'espace $AMBC$.

* Art. 142.

Si v exprime la fluxion de l'espace AMP , on aura $v = \sqrt{aa - xx}$, & $\overline{DP}^2 \times v = d d v + x x v$, dont la fluente sera $* d d v + \frac{1}{2} a a v - \frac{1}{2} x \times a a - x x^2$, laquelle est $= d d n + \frac{1}{2} a a n$, lorsque $v = n$, & $x = a$.

E X E M P L E V.

Fig. 176.

295. Soit $AMaM$ une surface sphérique qui balance autour de la ligne TT .

Si $AD = d$, $AP = x$, $PM = y$, $Aa = 2a$, la circonférence $AMaM = c$, on aura $\frac{c^2}{a}$ pour la circonférence du rayon PM , & $\overline{DP}^2 = \overline{d - x}^2$. Or le produit de toutes les particules

ticules de la circonférence $\frac{e}{a}$, chacune multipliée par le quarré

de sa distance à l'axe de balancement T T, sera $* \overline{d+x^2} + \frac{1}{2} y y$. Art. 123.

$\times \frac{e}{a} = d d + 2 d x + \frac{1}{2} x x + a x \times \frac{e}{a}$, parce que $y y = 2 a x -$

$x x$. Cette valeur étant multipliée par la fluxion $* \frac{dx}{y}$ de l'arc . Art. 134

A M, donnera $c d d \dot{x} + 2 c d x \dot{x} + a c x \dot{x} + \frac{1}{2} c x x \dot{x}$ pour la

fluxion des forces, dont la fluente sera $c d d x + c d x x +$

$\frac{1}{2} a c x x + \frac{1}{6} c x^3$, laquelle deviendra $= 2 a c d d + 4 a a c d +$

$\frac{10}{3} a^2 c$, lorsque $x = 2 a$; & comme la somme des momens est

égale au produit de la surface sphérique $= 2 a c$, multipliée par

la distance D C $= a + d$ du centre de gravité C au point de

suspension D, les forces divisées par les momens, donneront

$\frac{2 d d + 6 a d + 5 a a}{3 a + 3 d}$ pour la distance cherchée.

E X E M P L E V I.

296. Soit A M a M une sphere qui balance autour de la ligne T T.

Puisque $y y = 2 a x - x x$, $(\frac{e}{2 a} y y) = \frac{2 a c x - c x x}{2 a}$ sera l'aire du

cercle décrit par P M; & comme $\overline{D P} = d + x^2$, on aura $* \frac{d+x^2}{2 a} \times \frac{2 a c x - c x x}{2 a}$. Art. 124.

$= d d + 2 d x + \frac{1}{2} a x + \frac{1}{2} x x \times$ par

$\frac{2 a x c - c x x}{2 a}$ pour le produit de tous les élémens du cercle M M,

chacune multipliée par le quarré de sa distance à l'axe de balan-

cement; ainsi $d d + 2 d x + \frac{1}{2} a x + \frac{1}{2} x x \times$ par $\frac{2 a c x - c x x}{2 a}$

sera la fluxion des forces, dont la fluente $\frac{1}{2} c d d x x + \frac{1}{2} c d x^3$

$+ \frac{1}{8} c x^4 - \frac{c d d x^3}{6 a} - \frac{c d x^4}{4 a} - \frac{3 c x^5}{40 a}$, deviendra $= A. \frac{1}{2} a a c d d +$

$\frac{1}{12} a^2 c d + \frac{13}{60} a^2 c$, lorsque $x = a$, & $= B. \frac{1}{2} a a c d d + \frac{1}{2} a^2 c d$

$+ \frac{11}{12} a^2 c$, lorsque $x = 2 a$. La premiere de ces valeurs A

étant divisée par les momens, ou produit de la demi-sphere. $\frac{1}{2} a a c$ multipliée par la distance de son centre de gravité $* d +$. Art. 123.

$\frac{1}{2} a$ au point de suspension, donnera $\frac{40 d d + 50 a d + 16 a a}{25 a + 40 d}$ pour la dis-

tance du centre d'oscillation de la demi-sphere; & la seconde B

étant divisée par le produit de la sphere $\frac{1}{2} a a c$, multipliée par

la distance $a + d$ de son centre de gravité au point de suspen-

Y

sion, donnera $\frac{5dd+10ad+7aa}{5a+5d}$ pour la distance du centre d'oscillation de la sphere entiere.

E X E M P L E V I I.

Fig. 173.

297. Soit *AB* un cylindre droit qui balance autour de la ligne *TT* perpendiculaire à son axe *BA*.

Soit coupé ce cylindre par un plan *MPM* perpendiculaire à l'axe *AB*; & soit le rayon *PM* = *a*, sa circonférence = *c*, *AP* = *x*, *AD* = *d*, *AB* = *b*: cela posé, on aura $\overline{d+x} \times \frac{1}{2} a c x$ pour la fluxion des momens, & $\frac{1}{2} a c d d x + a c d x x + \frac{1}{2} a c x x x + \frac{1}{8} a^3 c x$ pour celle des forces, dont la fluente $\frac{1}{2} a c d d x + \frac{1}{2} a c d x x + \frac{1}{6} a c x^3 + \frac{1}{8} a^3 c x$, deviendra $\frac{1}{2} a b c d d + \frac{1}{2} a b b c d + \frac{1}{6} a c b^3 + \frac{1}{8} a^3 b c$, lorsque *x* = *b*, & les momens $\overline{d+x} \times \frac{1}{2} a c x$, deviendront = $2 d + b \times \frac{1}{2} a b c$; par conséquent les forces divisées par les momens, donnent $\frac{12dd+12bd+4bb+3aa}{12d+6b}$ pour la distance demandée.

E X E M P L E V I I I.

Fig. 169.

298. Soit *EAF* un cone droit qui balance autour de la ligne *TT* perpendiculaire à son axe *AC*.

Soit le cone coupé par un plan *MPM* parallele à sa base, & soit *DA* = *d*, *AP* = *x*, *AC* = *a*, *CE* ou *CF* = *r*, & *c* la circonférence de la base. Cela posé, on aura *AC* : *CF* :: *AP* : *PM* = $\frac{r x}{a}$, & $\left(\frac{c}{2 r} \overline{PM}^2\right) = \frac{c r x x}{2 a a}$ pour la valeur du cercle *MPM*. Ainsi $\overline{d+x} \times \frac{c r x x}{2 a a}$ sera la fluxion des momens, & $dd + 2 d x + x x + \frac{c r x x}{4 a a} \times$ par $\frac{c r x x}{2 a a}$ celle des forces, dont la fluente $\frac{1}{2} dd + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{2} x x + \frac{c r x x}{2 a a} \times$ par $\frac{c r x^3}{2 a a}$, divisée par les momens $\overline{d+x} \times \frac{c r x^3}{2 a a}$, donnera $\frac{20dd+30ad+12aa+3rr}{15a+10d}$ pour la distance cherchée, en supposant *x* = *a*.

L E M M E I I I.

Fig. 171.

299. Si le rectangle *AFGE* est divisé en deux également par la perpendiculaire *BC* au côté *AE*, la somme des produits des quarrés *DP* des lignes tirées d'un point fixe *D* dans la base *AE*,

prolongée s'il le faut, chacun multiplié par l'élément correspondant MM de ce rectangle, sera $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{3} \overline{BC}^2 \times$ par le rectangle AFGE.

Car si $DC = d$, MM ou $EA = a$, $BC = b$, $PC = x$, on aura $a \times d + x x$ pour la fluxion de cette quantité, dont la fluente $a x + \frac{1}{2} x x$, donnera $d d + \frac{1}{3} b b \times a b$, lorsque $x = b$.

L E M M E I V.

300. La somme de tous les produits des quarrés $\overline{DP}^2$, chacun multiplié par l'élément mm du triangle EBA, sera $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{3} \overline{BC}^2 \times$ par EBA.

Car puisque $BC : AE :: BP (b - x) : mm = \frac{ab - ax}{b}$, on aura $\frac{ab - ax}{b} \times d d + x x$ pour la fluxion de cette quantité, dont la fluente $a d d + \frac{1}{2} a x^2 - \frac{a d x x}{2b} - \frac{a x^3}{4b}$, donnera $\frac{1}{2} a b \times d d + \frac{1}{6} b b$, lorsque $x = b$.

E X E M P L E I X.

301. Soit EAL une pyramide droite qui balance autour de la ligne TT, perpendiculaire à son axe CA dans le plan d'un de ses côtés. Fig. 158.

Si l'on coupe cette pyramide par un plan MM parallèle à la base, & que l'on tire MM parallèle à GE, coupant l'axe en P; & si $AP = x$, $AC = a$, FL ou $EG = b$, $AD = d$, on aura $MM = \frac{bx}{a}$. Ainsi $d + x \times \frac{b b x x}{a a}$ sera la fluxion des momens, & $d d + 2 d x + x x + \frac{b b x x}{3 a a} \times$ par $\frac{b b x x}{a a}$ celle des forces, dont la fluente $\frac{1}{3} d d + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{3} x x + \frac{b b x x}{15 a a} \times$ par $\frac{b b x^3}{a a}$, divisée par les momens $\frac{1}{3} d + \frac{1}{2} x \times \frac{b b x^3}{a a}$, donnera $\frac{10 d d + 30 d d + 12 a a + 4 b b}{15 a + 10 d}$ pour la distance demandée, lorsque $x = a$. * Art. 199.

E X E M P L E X.

302. Si l'on suppose à présent que l'axe de balancement TT soit parallèle à la diagonale LE.

Y ij

* Art. 300.

On aura $\frac{d^2}{2} x \times \frac{bbxx}{aa}$ pour la fluxion des momens, & * $d d$
 $+ 2 x + x x + \frac{bbxx}{6aa}$ $\times$ par $\frac{bbxx}{aa}$ pour celle des forces, dont
 la fluente $\frac{1}{3} d d + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{3} x x + \frac{bbxx}{30aa}$ $\times$ par $\frac{bbx^3}{aa}$, divisée par les
 momens $\frac{1}{3} d + \frac{1}{2} x \times \frac{bbx^3}{aa}$, donnera $\frac{10dd + 30ad + 12aa + 1bb}{15a + 10d}$ pour la
 distance cherchée, lorsque $x = a$.

DEFINITION.

Le centre de percussion d'un corps est un point dans la surface
 de ce corps, tel que s'il rencontroit un obstacle par ce point
 étant en mouvement, il le frapperoit par une plus grande force
 que par tout autre point.

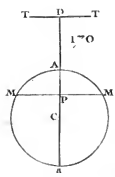
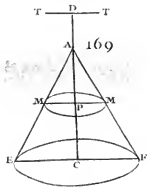
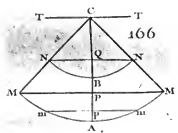
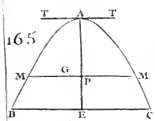
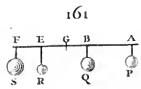
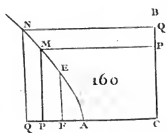
PROBLEME GENERAL.

Fig. 174.

303. Trouver le centre de percussion O de deux corps A & B,
 considérés comme des points placés dans le plan de la figure.

Soit l'axe de balancement D perpendiculaire au plan de la
 figure, & soient tirées les perpendiculaires AP, BQ, à la ligne
 DO, tirée à volonté dans le plan des corps, & les droites Aa,
 Bb perpendiculaires aux lignes AD, BD, qui expriment les
 distances de ces corps à l'axe de balancement: soient enfin tirées
 du centre O les perpendiculaires Oc, Od aux directions Aa,
 Bb. Cela posé, il est évident que si les momens des corps A,
 B, sont réciproquement proportionnels aux distances Od, Oc
 de leurs directions, ils frapperont l'obstacle par le point O avec
 plus de force que par tout autre, puisque les forces seront égales
 de part & d'autre; ils frapperont cet obstacle de la même ma-
 nière que si les forces étoient réunies dans ce point. C'est pour-
 quoi si DA = a, DB = c, DP = b, DQ = d, DO = n,
 les triangles semblables DPA, DAA, Oca, & DQB, DBb,
 Od b, donneront 1°. DP : DA :: DA : Da = $\frac{aa}{b}$. 2°. DQ :
 DB :: DB : Db = $\frac{cc}{d}$. Ainsi aO = $n - \frac{aa}{b}$, bO = $\frac{cc}{d} - n$.
 3°. DA : DP :: Oa : Oc = $\frac{bn - aa}{a}$. 4°. DB : DQ :: Ob :
 Od = $\frac{cn - dn}{c}$. Par conséquent si p & q expriment les poids des

on .





corps A & B, on aura $(DA \times p) ap : (DB \times q) cq :: (Od)$
 $\frac{ec - da}{e} : (Oc) \frac{ba - aa}{a},$ ou $DO = n = \frac{aaq + ccq}{b_1 + dq}.$

Ce qu'on vient de dire à l'égard de deux corps ou points convient également à tout autre nombre, même infini; car on prouvera toujours que la somme des forces, si les corps sont tous placés du même côté de l'axe de balancement, divisée par la somme des momens, donnera la valeur de la distance cherchée; par conséquent si la ligne DO passoit par le centre de gravité des corps, & si le pendule pouvoit frapper un obstacle par ce point O, le centre de percussion fera le même que le centre d'oscillation.

SECTION V.

Des Problemes Physico-Mathématiques.

L E M M E.

304. **S** I trois puissances P, Q, R, sont en équilibre, les côtés Fig. 175.
 AB, AC, BC du triangle, qui coupent les directions à angles droits en G, H, O, exprimeront les rapports de ces puissances.

Soit O E A F un parallelogramme fait des directions, enforte que les côtés OE, AE, ou OF & AO expriment les rapports de ces puissances; les triangles semblables AOB, AGO, & AOC, AHO donnent l'angle ABO = l'angle AOG, & l'angle ACO = l'angle AOH, égal à son alterne OAE; ainsi les triangles ABC & EOA sont semblables; & par conséquent puisque les côtés du dernier expriment les rapports de ces puissances, ceux du premier les exprimeront aussi.

P R O B L E M E I.

305. *L'intrados d'une voûte étant donné, trouver l'extrados, Fig. 176. enforte que tous les vouffoirs soient en équilibre entr'eux.*

L'on suppose les côtés des vouffoirs comme des plans inclinés parfaitement polis & sans friction.

L'on peut considérer la génération des voûtes de deux manières, l'une par le mouvement parallèle d'un plan, & l'autre par le mouvement circulaire d'un plan; ce qui donne deux cas différens.

I. Cas. Des voûtes décrites par un mouvement parallèle.

I. Soit $AHKLBA$ le plan générateur, & supposons que les côtés HA , Ib , Kc , &c. des voussoirs étant prolongés, se rencontrent tous dans le même point C , & qu'ils soient tous perpendiculaires à l'intrados $AbcdB$. Cela posé, si par les centres de gravité V , X , Y des voussoirs, on tire les verticales VR , XS , YT , & la ligne horizontale DQ à volonté, qui rencontre les joints en E , F , G , il est évident que si les parties DE , EF , FG , expriment les pesanteurs absolues des voussoirs correspondans, la ligne CE exprimera les efforts des voussoirs AI , bK , l'un contre l'autre, & CF les efforts des voussoirs bK , & cL , & ainsi de suite.

Car les côtés de chacun de ces triangles sont perpendiculaires aux directions des trois puissances qui tiennent le voussoir en équilibre; par exemple EF est perpendiculaire à l'effort vertical provenant de la pesanteur absolue du voussoir bK , CE à son effort relatif contre les voussoirs AI , & CF à celui contre le voussoir cL . Or puisque les lignes DE , EF , FG , sont dans les rapports des pesanteurs absolues des voussoirs, lorsque les lignes CD , CE , CF , CG , &c. expriment les efforts relatifs dont les voussoirs adjacens se pressent également, il s'ensuit qu'en trouvant la courbe $HIKL$, telle que les espaces $AHIb$, $bIKc$, soient entr'eux comme les lignes DE , EF , on aura la solution du problème.

A cause que les secteurs circulaires décrits avec les rayons CF , Cb , CI , sont semblables, & sont aussi comme* les fluxions des espaces CDE , CAb , CHI , il s'ensuit que si l'on a toujours $CE^2 = CI^2 - Cb^2$, le triangle CDE sera égal à l'espace $AHIb$; & comme les triangles CDE , CEF ont la même hauteur CD , ils sont comme les bases DE , EF , &c. & par conséquent il ne s'agit que de déterminer la position de la droite DQ , pour pouvoir construire l'extrados demandé $HIKL$.

Si l'on suppose la hauteur CA de la voûte, aussi-bien que l'épaisseur AH de la clef données, on aura lorsque CI devient $= CH$, $Cb = CA$, & $CE = CD$; & par conséquent

* Art. 244. n.

4.

Équation ci dessus deviendra $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CA}^2$; ce qui donne la position de la droite D Q.

II. Supposons à présent que les joints ne se rencontrent pas *Fig. 177.* tous dans un même point, & le reste de même que ci-dessus. Soit le joint M N prolongé, en sorte que D N soit le rayon de la développée de l'intrados en N; & soit d'un point quelconque d du joint vertical C A tirée la droite d Q horizontalement, & du point C la ligne C e parallèle à D N. Cela posé, on prouvera de la même manière que ci-devant, que si le côté d e du triangle C d e, exprime la pesanteur absolue du vouffoir A H M N, les côtés C d, C e, exprimeront les efforts relatifs de ce vouffoir contre les deux qui lui sont adjacens. C'est pourquoi si l'espace A H M N est égal au triangle C d e, la courbe H M Z sera celle que l'on demande.

Or puisque le mouvement angulaire des lignes C e, D N, est égal par construction, & les secteurs circulaires décrits par les rayons C e, D N, D M étant comme les quarrés des rayons, aussi-bien comme les fluxions des espaces décrits par ces lignes C e, D N, D M, il s'en suit que l'on doit avoir $\overline{DM}^2 = \overline{DN}^2 + \overline{Ce}^2$.

Si l'intrados A N B est une ellipse, C B, C A les demi-axes; & si $K N = c$, $p \times C B = \overline{CA}^2$, on aura * $\overline{DN}^2 = \frac{c^2}{p^2}$, & par * *Art. 100.* conséquent $\overline{DM}^2 = \frac{c^2}{p^2} + \overline{Ce}^2$.

II. CAS. Des voûtes décrites par un mouvement circulaire.

I. Si la surface décrite par la ligne E F exprime la gravité *Fig. 176.* du vouffoir décrit par l'espace b I K c dans la révolution de la figure C H K B autour de l'axe C A, les surfaces décrites par les lignes C E, C F, exprimeront les forces relatives avec lesquelles le vouffoir décrit par l'espace b K presse ceux qui lui sont adjacens; car si la ligne E F exprime la gravité du plan générateur c I, les lignes C E, C F exprimeront les efforts relatifs de ce plan contre les joints b I & c K; & par conséquent la surface décrite par E F, sera à la surface décrite par C E, ou C F, comme la pesanteur absolue du vouffoir décrit par b I K c est à la force relative avec laquelle ce vouffoir presse ceux qui lui sont adjacens. Ce que nous venons de dire à l'égard du vouffoir décrit par b K, est également vrai à l'égard de tout autre vouffoir quelconque; c'est pourquoi si la courbe H I K est telle que le solide décrit par l'espace b I K c est

toujours égal au solide décrit par le triangle CEF dans le même tems, elle sera celle que l'on demande.

Fig. 178.

Or à cause que les secteurs circulaires CEo , CNn , CMm , décrits par les rayons CE , CN , CM dans le même tems, sont comme les quarrés de ces mêmes rayons, & comme les fluxions des solides décrits par les plans CDE , CAN , CHM autour de l'axe CH , sont comme ces secteurs, chacun multiplié par la circonférence de cercle décrit par son centre de gravité, ou à cause que les circonférences sont comme leurs rayons; si de ces centres y , x , u , on tire les perpendiculaires yr , xq , up sur CH , ces fluxions seront comme $CEo \times yr$, $CNn \times Xq$, $CMm \times up$; mais puisque $Cy : Cx : Cu :: yr : xq : up$, & que les distances Cy , Cx , Cu , étant comme les rayons CE , CN , CM , ces fluxions seront comme les cubes des mêmes rayons; & par conséquent on doit avoir $\overline{CM}^3 - \overline{CN}^3 = \overline{CE}^3$, ou $\overline{CM}^3 = \overline{CN}^3 + \overline{CE}^3$.

* Art. 280.

Lorsque $CM = CH$, & $CN = CA$, CE deviendra $= CD$. Ainsi le rayon CA & l'épaisseur AH de la clef de la voûte étant données, la position de la ligne DQ sera aussi donnée, par le moyen de laquelle on peut décrire la courbe.

L'on voit que telle que puisse être l'épaisseur de la clef, & telle courbe que puisse être l'intrados, pourvu que le point B ne tombe pas au point C , l'extrados sera toujours du genre des conchoïdes, & la ligne DQ sera son asymptote; car CM ne peut point devenir $= CE$, à moins que CN ne devienne zero.

Mais dans la figure 177, si le rayon de la développée de l'intrados est en quelque point zero, on aura alors $CE = MN$; ce qui fait voir 1°. que le dernier vouffoir doit être d'une pesanteur infinie. 2°. Que tant plus petite CD est, tant moindre le dernier vouffoir deviendra, sans néanmoins devenir d'une pesanteur finie. 3°. Que si l'extrados étoit donné au lieu de l'intrados, la même équation serviroit également pour décrire l'intrados.

COROLLAIRE.

Fig. 176.

306. Si dans les voûtes formées par un mouvement parallèle, l'intrados est une droite parallèle à la droite DQ , on aura $CD : CA :: CE : Cb = \frac{CA \times CE}{CD}$, & par conséquent l'équation $\overline{CI}^3 = \overline{CE}^3 + \overline{Cb}^3$, deviendra $CI \times CD = CE \sqrt{CA^3 + CD^3}$.
Or

Or comme il n'y a que les lignes CI , CE , qui soient variables dans cette équation, il s'ensuit que l'extrados sera aussi une droite parallèle à l'intrados.

Et si dans les voûtes formées par un mouvement circulaire, Fig. 178. l'intrados est une droite parallèle à DQ , on aura aussi $CD : CE ::$

$CA : CN = \frac{CA \times CE}{CD}$; & par conséquent $CM \times CD = CE$

$\sqrt{CA^2 + CD^2}$; ce qui fait voir que l'extrados est aussi une droite parallèle à l'intrados.

M. Chardons est le premier que je sçache qui a donné la solution du problème des voûtes formées par un mouvement circulaire, à laquelle je suis redevable de celle-ci, quoique je croye qu'il y a une petite erreur dans la sienne.

Construction de quelques voûtes formées par un mouvement parallèle.

I. Soit l'intrados AB un quart de cercle, C son centre, & Fig. 179. AH l'épaisseur donnée de la clef. Si l'on prend $BD = CH$, & que l'on tire la droite DQ perpendiculaire au joint vertical CA ; & si après avoir tiré un grand nombre de rayons CI , CK , CL , &c. on prend une droite $ca = CA$, & sur la perpendiculaire cg à cette ligne, les parties $ce = CE$, $cf = CF$, $cg = CG$, &c. on fait toujours $CI = ae$, $CK = af$, $CL = ag$; la courbe qui passera par tous les points H , K , L , sera l'extrados demandé.

Car puisque $CA = CB$, & $CH = BD$, on aura $\overline{CD^2} = \overline{CH^2} - \overline{CA^2} = \overline{BD^2} - \overline{CB^2}$; & comme $ca = CA$, $ce = CE$, & $ae^2 = \overline{CI^2}$: donc $\overline{CI^2} = \overline{CE^2} + \overline{CA^2}$.

II. Soit l'intrados AB un arc de cercle décrit du centre C , Fig. 180. & AH l'épaisseur donnée de la clef. Sur CH comme diamètre, soit décrite la demi-circonférence de cercle HMC , & prise $CM = CA$, $CD = HM$, & la droite DQ tirée parallèle à l'horizontale CB . Cela posé, si l'on prend sur une des jambes de l'angle droit acg , la partie $ac = AC$, & sur l'autre les parties $ce = CE$, $cf = CF$, $cg = CG$, &c. & que l'on fasse toujours $CI = ae$, $CK = af$, $CL = ag$, &c. la ligne qui passera par tous les points H , I , K , L , &c. sera l'extrados demandé.

Car puisque $CM = CA$, & $HM = DC$, on aura $\overline{DC^2} =$
Z

$\overline{CH}^2 - \overline{CA}^2$, & comme $ca = CA$, & $ce = CE$, il s'ensuit que $\overline{ae}^2$ ou $\overline{CI}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CA}^2$.

Fig. 177.

III. Soit l'intrados ANB un quart d'ellipse, CA , CB , les demi-axes, & AH l'épaisseur donnée de la clef. Si l'on fait $\overline{CB}^2 = b \times CA$, & $Cd = \sqrt{b + AH^2 - bb}$, & que l'on tire la droite dQ perpendiculaire au joint vertical CA , & après avoir pris sur une jambe de l'angle droit geo la partie $cm = \frac{KN^3}{pp}$, & sur l'autre $ce = Ce$, & que l'on fasse toujours $MN = me - cm$, le point M fera toujours dans l'extrados cherché.

* Art. 11.

Car puisque $\overline{CA}^2 = p \times CB$, lorsque le rayon DM tombe sur l'axe CA , on aura $KN = c = CA$, & $\frac{c^3}{pp} = \frac{CB^3}{CA} = b$, & ainsi DM devient $= b + AH$ dans ce cas; & par conséquent $Ce = Cd = \sqrt{b + CH^2 - bb}$; & comme $cm = \frac{KN^3}{pp} = \frac{c^3}{pp}$, & $ce = Ce$ par construction, em fera $= \sqrt{Ce^2 + DN^2}$, & $em - cm = NM = \sqrt{Ce^2 + \frac{c^6}{p^2} - \frac{c^3}{pp}}$; par conséquent $NM + \frac{c^3}{pp} = DM = \sqrt{Ce^2 + DN^2}$, parce que $DN = \frac{c^3}{pp}$.

M. Chardons a présenté la solution de ce problème à l'Académie des Sciences en 1730; mais comme il s'étoit trompé en ce qu'il faisoit la clef de la voûte infiniment longue, on n'a pas cru devoir le citer dans l'édition Angloise.

PROBLEME II.

Fig. 181. 307. Soit BB une piece de bois placée horizontalement, & soutenue par deux autres pieces AB , AB , qui font un angle donné en B avec la premiere; l'on demande la position de l'arcboutant AC d'une longueur donnée, telle que la piece BB soit la mieux soutenue qu'il soit possible.

L'on suppose que l'arcboutant AC soit si bien arrêté en A , C , qu'il ne puisse glisser, & on néglige sa pesanteur.

Si l'on prend $BH = \frac{1}{2} AC$, & que l'on tire des points A & H les lignes HK , AG , perpendiculaires sur BB ; & si AC exprime la force absolue de cette piece, AG exprimera la force relative

avec laquelle elle soutient la piece BB ; ainsi BG multipliée par le bras de levier BC, doit être un plus grand.

Or si $AC = a$, $HK = n$, $KB = m$, $AG = x$, on aura $GC = \sqrt{aa - xx}$; & à cause des triangles semblables $HK B$, $AG B$, on aura $HK : KB :: AG : GB = \frac{m}{n} x$. Donc $BC = \sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} x$, & $AG \times BC = x \sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} x x$, dont la fluxion étant supposée $= 0$, donne $\dot{x} \sqrt{aa - xx} - \frac{xx \dot{x}}{\sqrt{aa - xx}} - \frac{1}{n} x \dot{x} = 0$. D'où l'on tire $x^4 - aaxx + aan = 0$, parce que $4nn + 4mm = aa$; & en extrayant la racine quarrée, on aura $xx - \frac{1}{2}aa \pm am = 0$, ou $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm am}$, après avoir mis $4mm$ au lieu de la valeur $aa - 4nn$.

COROLLAIRE I.

308. Si l'on met la valeur de x dans $y = x \sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} x x$, on aura $y = \frac{1.4nn - 4nm + 1.4mm}{1.2}$. Or lorsque $x = 0$, y sera aussi $= 0$; & lorsque $x = 2n$, on aura encore $y = 0$; mais si $x > 2n$, y sera négative ; c'est pourquoi la premiere valeur $y = \frac{1.4nn - 4nm + 1.4mm}{1.2}$ sera un * plus grand, & la seconde $y = \frac{1.4nn - 4nm - 1.4mm}{1.2}$ sera aussi un plus grand, mais négatif ; car cette valeur ne peut passer de positive en négative sans devenir $= 0$, par conséquent le moindre qui doit être entre le plus grand est zero.

Si l'angle ABC au lieu d'être obtus étoit aigu, on aura $y = x \sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n} x x$, dont la fluxion étant faite $= 0$, ou ce qui est la même chose, $KB (m)$ étant fait négatif dans les valeurs de x & y ci-dessus, donnera $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm am}$, & $y = \frac{1.4nn + 4nm \pm 1.4mm}{1.2}$, dont la premiere valeur $y = \frac{1.4nn + 4nm + 1.4mm}{1.2} = \frac{a^2 + 1.4am}{4}$, sera celle que l'on cherche, & la seconde sera un moindre. Par conséquent $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ exprimera le sinus AG de l'angle ACG, lorsque l'angle ABC

est obtus, & $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$, lorsqu'il est aigu, & le supplément du premier.

COROLLAIRE II.

309. Puisque la somme des quarrés du sinus & du cosinus d'un angle est égale au quarré du rayon, il s'ensuit que le sinus $\sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ sera celui du complément de l'angle du sinus $\sqrt{\frac{1}{2}aa + am}$; car $\frac{1}{2}aa - am + \frac{1}{2}aa + am = aa$.

Si l'angle A B G est de 60 degrés, K B = $m = \frac{1}{2}a$, & A G = $\sqrt{\frac{1}{2}aa - am} = \frac{1}{2}a$. Donc l'angle A C B sera de 30 degrés, & par conséquent si l'angle A B C est de 60 degrés, l'angle A C B sera aussi de 60 degrés.

Mais si l'angle A C B est droit, m sera = 0, & A G = $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, c'est-à-dire l'angle A C B sera de 45 degrés.

PROBLÈME III.

Fig. 112.

310. Soit A G une piece de bois d'une longueur quelconque, fixée en A, en sorte que l'angle C A B soit constant, l'on demande la position d'un arcbutant D E d'une longueur donnée, de manière que la piece A G soit le mieux supportée qu'il soit possible.

Que A C = $\frac{1}{2}$ D E = $\frac{1}{2}a$, la perpendiculaire C B à A D = n , A B = m , & que du point D l'on tire la ligne D F = x perpendiculaire à A G; cela posé, si A E (a) exprime la force absolue de cette piece, D F exprimera la force relative avec laquelle elle soutient la piece A G; c'est pourquoi D F multipliée par la distance A E, entre le point d'appui A & la direction, doit être un plus grand.

Or à cause des triangles semblables A B C, A F D, on a C B : B A :: D F : F A = $\frac{m}{n} x$; & comme E F = $\sqrt{aa - xx}$, A E sera = $\sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n} x$. Ainsi A E $\times$ D F = $y = x \sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n} x x$; & comme cette valeur est la même que celle du problème précédent, on aura $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm am}$, lorsque y est un plus grand; & par conséquent $y = \frac{a^2 + 14am}{4n}$ sera le plus grand demandé.

COROLLAIRE.

311. Si l'angle ADE, au lieu d'être obtus étoit aigu, le point E tombera entre les points A & F; ainsi $y = -x\sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n}xx$; ce qui donne encore $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \mp am}$, & par conséquent $y = \frac{1amm - am^2 + 1am^2}{2n}$, dont la première valeur sera le plus grand cherché, & la seconde un plus grand négatif.

D'où l'on voit que $\sqrt{\frac{1}{2}aa + am}$ est le sinus de l'angle DEF dans le premier cas, & $\sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ dans le second. Mais comme la première valeur de y est plus grande que la seconde, la première position est aussi préférable à la dernière.

Il est aisé de voir que les deux derniers problèmes sont d'une grande utilité dans l'Architecture; car sçachant la force du bois par quelques expériences, on pourra calculer d'une manière précise la quantité de bois qu'il faut pour que la charpente soit capable de soutenir un certain fardeau, ce qui donne deux grands avantages, l'un dans la dépense, & l'autre de ne pas surcharger un bâtiment par un fardeau inutile.

PROBLEME IV.

312. Soit ABCD un plan incliné sur lequel glisse une boîte cubique LT, ouverte par le haut, & mue uniformément par une puissance P dans une direction parallèle au plan, l'on demande l'angle d'inclinaison BAK de ce plan sur l'horizontale AK, tel que la puissance P tire le plus d'eau hors d'un réservoir R, dans un tems donné qu'il soit possible. Fig. 133.

Soit la hauteur KB du plan donné, & du point B comme centre, soit décrit un arc de cercle Km, & tirée la droite mp perpendiculaire sur KB. Cela posé, il est évident que si l'angle A, ou son sinus Bp augmente, la longueur AB du plan diminue; & si EFNV représente le niveau de l'eau, & que le prisme LGFNHVE, ou seulement sa hauteur NH, ou GF, à cause que les autres dimensions sont constantes, augmente, le volume d'eau augmentera aussi. Donc le produit Bp x FG doit être un plus grand.

Soit BK = Bm = a, Bp = x, EI = IG = 1, on aura pm = $\sqrt{aa - xx}$; & comme les lignes EF, AK, étant hori-

zontales, font parallèles, & les lignes EI, AB le font par hypothèse, les triangles rectangles EIF, & mpB seront semblables; ainsi $mp : pB :: EI : IF = \frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$. Donc $FG = 1$

$-\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$, & $Bp \times FG = x - \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$, dont la fluxion

étant supposée $= 0$, donne $aa-xx^{\frac{1}{2}} = 2ax - x^{\frac{3}{2}}$; ou en supposant $ay = xx$, cette équation deviendra $2y^{\frac{1}{2}} - 7ayy + 7aay - a^{\frac{3}{2}} = 0$.

Si l'on fait $a = 1$, on trouvera $\dagger y = \frac{191376}{1714249} = xx$, & $x = \frac{540764}{1309446} = 0,4129716$; par conséquent $1 : 0,4129716 :: 1000000 : 4129716$ au sinus de l'angle BAK, qui sera de 24 degrés & 24 minutes.

Il est évident que la valeur trouvée pour x fait $Bp \times FG$ un plus grand; car lorsque $x = 0$, $y = x - \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$ sera aussi $= 0$; & lorsque x commence à augmenter depuis zero, y augmente aussi jusqu'à ce que x soit $= 0,4129716$, alors y sera le plus grand, & ensuite elle diminue jusqu'à ce que $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, ou y est encore une fois $= 0$, après cela y augmente négativement à l'infini.

PROBLEME V.

Fig. 184.

313. Soit $\triangle D$ la section d'une rivière dans laquelle on veut bâtir une écluse; l'on demande l'angle DEA, que les portes, dont DE, AE représentent les sections de cette écluse, doivent faire, afin qu'elles résistent contre la pression, de l'eau le mieux qu'il soit possible.

Sur AD comme diamètre, soit décrite la demi-circonférence de cercle DMA, & du point de rencontre M, de l'une de ces sections prolongées avec la circonférence, soit tirée la corde DM; soit de plus tiré le rayon BEC perpendiculaire sur AD. Cela posé, à cause que les forces des portes diminuent lorsque la pression de l'eau augmente, & les pressions étant comme les surfaces pressées, si la hauteur des portes demeure de même, la pression DE sera comme cette ligne; & comme la force du

$\dagger$ On donnera dans l'article 351 la manière de trouver les racines des équations.

bois de la même épaisseur diminue en proportion que la longueur augmente, il s'ensuit que la force de la porte AE est réciproquement comme $\overline{AE^2}$; ou à cause que $AE : AC :: AD : AM$, & AC, AD étant constantes, cette force est dans la raison directe de $\overline{AM^2}$.

Mais pour cette pression, il faut encore avoir égard à l'ouverture de l'angle DEA , qui rend la résistance des portes plus faible, ou, ce qui est la même chose, à mesure que l'angle A ou son sinus DM augmente, la résistance de la porte augmentera aussi; par conséquent $DM \times \overline{AM^2}$, doit être un plus grand.

Si $AD = a$, $DM = x$, on aura $\overline{AM^2} = a^2 - x^2$, & $DM \times \overline{AM^2} = ax - x^3$, dont la fluxion $ax - 3x^2 = 0$, donne $x = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ainsi l'angle EAD sera de 36 degrés & 16 minutes, & l'angle cherché DEA de 109 degrés & 28 minutes.

L E M M E I I.

314. Si les particules d'un fluide sont tellement disposées qu'elles puissent toutes agir successivement contre une surface, sans s'empêcher les unes les autres, la force absolue du fluide est à la force relative avec laquelle il frappe une ligne, ou plan DN , dans une direction oblique, comme le carré du sinus total est au carré du sinus de l'angle d'incidence. Fig. 186.

Du point de milieu C , de DN ou de BA comme centre, soit décrite la circonférence de cercle $NBKDA$, & du point D soit tiré DP perpendiculaire sur AB . Cela posé, il est évident que la force relative avec laquelle chaque particule frappe la ligne DN dans la direction oblique KC , est à la force absolue avec laquelle elle frapperoit DN dans la direction KF perpendiculaire, comme le sinus KF de l'angle d'incidence KCF , est au sinus total KC ; mais le nombre des particules qui frappent DN , est au nombre des particules qui frapperoient en même tems le plan AB perpendiculaire à KC , comme CP est à AC ; ou à cause que les triangles semblables CPD, KCF sont égaux; comme KF est à KC , & comme le produit de la force d'une particule multipliée par le nombre des particules qui frappent en même tems, exprime la force totale, il s'ensuit que la force absolue du fluide est à la force relative avec la-

quelle il frappe le plan DN comme le quarré $\overline{KC}^2$ du sinus total est au quarré $\overline{KF}^2$ du sinus de l'angle d'incidence.

COROLLAIRE.

* Art. 314.

315. De là il suit que les plans inégaux & inégalement inclinés à la direction du fluide, sont frappés par des forces qui sont en raison des quarrés des sinus des angles d'incidence multipliés par les plans respectifs. Car soit le plan rs divisé également en C , & prolongé jusqu'à la rencontre de la circonférence en d, n , & soit tiré dp perpendiculaire sur AB : cela posé, Cp sera le sinus de l'angle d'incidence KCd ; & si P, Q, R expriment les forces relatives avec lesquelles les plans DC, dC, rC , sont frappés en même tems, on aura $* \overline{PC}^2 : \overline{pC}^2 :: P : Q$; mais des plans inégaux également inclinés sont frappés en raison de leurs longueurs; donc $dC : rC :: Q : R$; par conséquent en multipliant par ordre, $dC \times \overline{PC}^2$, ou $CD \times \overline{PC}^2 : rC \times \overline{pC}^2 :: P : R$.

N. B. Quoiqu'il n'y ait peut être point de fluide dans la nature tel que celui que nous venons de supposer, on ne laisse cependant pas que de tirer une grande utilité de l'application de ce principe à l'eau, au feu, à l'air, & autres fluides semblables; car l'expérience fait voir qu'en beaucoup de cas l'erreur est presque insensible, & peut être négligée sans conséquence.

De plus, la partie des Mathématiques la plus utile dépend du mouvement des fluides, ce qui fait voir qu'on est obligé d'établir quelques principes qui approchent de la vérité le plus qu'il est possible. Il seroit à souhaiter que ceux qui se mettent à faire des expériences, s'appliquassent plutôt à des choses utiles qu'à certaines propriétés triviales & sans conséquence.

Le lecteur doit faire attention que les problemes qu'on donnera dans la suite, & qui dépendent de la Physique, approchent d'autant de la rigueur mathématique que les suppositions dont ils dépendent sont vraies, ou approchent de la vérité.

PROBLEME VI.

Fig. 185.

316. Etant donnée la vitesse d'un fluide parfait qui fait mouvoir une machine, l'on demande le plus grand effet possible que cette machine puisse produire dans un tems donné.

Soit

Soit P le poids à élever par la machine que l'on suppose être composée d'une ou plusieurs roues, dont $KCTH$ est celle qui est mise en mouvement par le fluide. Soient $B, T, \&c.$ les aubans, ou palletes; & soit v la vitesse naturelle du fluide, a le bras de levier du poids P , c'est-à-dire le produit des rayons AH, LN de la lanterne $F GH$, & de l'arbre OIN sur lequel est roulée la corde à laquelle le poids P est attaché; & b le bras de levier sur lequel agit le fluide, ou le produit des rayons LH, AB des roues. Cela posé, par la règle ordinaire de la Mécanique, la somme des produits des puissances motrices, chacune multipliée par son bras de levier, est égale au produit du poids à élever par son bras de levier dans le cas d'équilibre. Or comme la force du fluide est comme le carré * de la vitesse multiplié par la surface * Art. 314: frappée; & comme cette surface est ici constante, on aura $aP = bvv$.

Mais lorsque la machine est en mouvement, le fluide ne frappe les aubans que par la différence entre la vitesse du fluide & celle des aubans; ainsi si x exprime la vitesse du centre des forces des aubans, qui est le même ici que le centre de gravité, comme il sera aisé de le prouver, la force du fluide sera exprimée par $b \times \overline{v-x}^2$; & pour avoir le moment de cette force, on la doit multiplier par la vitesse x . Donc $b x \times \overline{v-x}^2$ sera le moment, ou l'exposant de l'effet de la machine; ce qui étant, fait un plus grand donne $b x \times \overline{v-x}^2 - 2 b x x \times \overline{v-x} = 0$. D'où l'on tire $vv - 4vx + 3xx = 0$, ou $x = \frac{1}{3}v$ pour le plus grand, & $x = v$ pour le moindre.

Car si $y = b x \times \overline{v-x}^2$, y & x peuvent commencer à croître depuis zero jusqu'à ce que $x = \frac{1}{3}v$, ou y est $= \frac{4}{27}v$, ou le plus grand; ensuite y diminue pendant que x augmente jusqu'à ce que $x = v$, alors y est $= 0$; après cela y augmente négativement à l'infini.

COROLLAIRE I.

317. D'où il suit que si la vitesse x du centre des forces des aubans est égale au tiers de la vitesse du fluide, la machine produira le plus grand effet qu'il soit possible.

COROLLAIRE II.

318. Soit Q le poids que la machine peut élever dans le cas de la plus grande perfection ; en mettant Q au lieu de P , & $\sqrt{x}$, ou son égal $\frac{1}{2}\sqrt{v}$ au lieu de v dans $aP = bvv$, on aura $aQ = \frac{1}{2}bvv$, & en multipliant ces deux dernières égalités ensemble, on aura $aQ \times bvv = \frac{1}{2}bvv \times aP$, ou $Q = \frac{1}{2}P$. Ce qui fait voir que le poids Q est égal aux quatre neuvièmes de celui qui est justement capable d'arrêter la machine.

COROLLAIRE III.

318. Le bras de levier b de la force motrice est au bras de levier a du poids Q , comme la vitesse $\frac{1}{2}v$ est à la vitesse $\frac{av}{3b}$ du poids Q , par conséquent $\frac{av}{3b}Q$, ou son égal $\frac{4av}{27b}P$, sera l'exposant de l'effet de la machine.

Dans la pratique il faut avoir égard aux frottemens, autrement l'effet ne répondra point au calcul.

PROBLEME VII.

Fig. 182.

319. *L'angle que les ailes rectangulaire & plane d'un moulin à vent font avec l'arbre étant constant, l'on demande la position de l'arbre à l'égard de la direction du vent qu'on suppose souffler uniformément, en sorte que les ailes tournent avec la plus grande vitesse possible.*

Soient X, Y , les deux ailes opposées, & qui sont jointes ensemble dans la figure 189, de manière que ABC soit l'angle que leurs plans font, l'une étant prolongée, & que la perpendiculaire BD sur AC représente la position de l'arbre ; alors les triangles rectanglés ADB, CDB seront semblables & égaux. Cela posé, si EB exprime la direction du vent, & que EF soit abaissée perpendiculairement sur AB , le carré EB^2 sera au carré EF^2 du sinus de l'angle d'incidence ABE , comme la force * absolue du vent est à la force relative avec laquelle il frappe l'aile X ; mais comme cette force n'agit pas dans la direction AD perpendiculaire à l'arbre BD , elle n'est pas toute employée à faire tourner l'arbre. Si donc l'on abaisse la perpendiculaire FG sur AC , EF sera à GE comme cette force est à la partie qui fait tourner le moulin.

* Art. 314.

De même, *cæteris paribus*, Ef est à Eg comme la force du vent contre l'aile Y est à la partie qui fait tourner le moulin.

La force du vent contre les deux autres ailes opposées étant égale à celle contre celle-ci, on ne les considérera pas.

Soit $BD = a$, $AB = c$, $AD = b$, $AE = x$, on aura $ED = b - x$, & $EB^2 = cc - 2bx + xx$, parce que $cc = aa + bb$. Or les triangles semblables ADB , AEF donnent $AB(c) : BD(a) :: AE(x) : EF = \frac{ax}{c}$, & $EB^2 : EF^2 :: 1 : \frac{a^2}{c^2} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx} =$ à la force dans la direction EF , & $EF : EG$, ou $AB : BD :: \frac{aa}{c^2} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx} : \frac{a^3}{c^3} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx} =$ à la force dans la direction GE .

Et comme $CE = 2b - x$, on aura $BC(c) : BD(a) :: CE(2b - x) : Ef = \frac{a}{c} \times 2b - x$, & en faisant le reste du calcul comme ci-dessus, on trouvera $\frac{a^3}{c^3} \times \frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx}$ pour la force dans la direction Eg . Donc la somme de ces forces qui est $\frac{a^3}{c^3} \times \frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx}$, ou $1 + \frac{4bb - cc}{cc - 2bx + xx}$ doit être un plus grand; ainsi sa fluxion étant faite $= 0$, donne $2bx - 2xx = 0$, ou $b = x$, c'est-à-dire $AE = AD$.

Il paroît d'abord que la quantité trouvée est un moindre au lieu d'un plus grand; mais en examinant la chose de plus près, on verra que la quantité $\frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx}$, ne peut devenir ni $= 0$ ni infinie; & lorsque $x = b$, elle est $= \frac{2bb}{aa}$; & en mettant toute autre valeur au lieu de x , on trouvera toujours qu'elle est moindre que $\frac{2bb}{aa}$, néanmoins avec cette condition que l'angle ABD soit plus grand que de 45 degrés.

PROBLEME VIII.

320. La direction du vent étant supposée parallèle à l'arbre AB , Fig. 152. l'on demande l'angle que les ailes doivent faire avec l'axe, pour qu'elles tournent avec la plus grande vitesse possible.

Comme on cherche ici l'angle ABD , il est clair qu'en supposant $x = b$ dans la force $\frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx} \times \frac{a^3}{c^3}$, on aura $\frac{2ab^2}{c^3}$, ou

Aa ij

$\frac{2axcc - ab}{c^3}$; & comme c est constante, & a (BD) variable, si l'on suppose $a = y$, on aura $\frac{2cy - 2y^3}{c^3}$ pour cette force, qui doit être un plus grand. Ainsi $2ccy - 6yy^3 = 0$, d'où l'on tire $y = c\sqrt{\frac{1}{3}}$. Par conséquent l'angle BAD sera de 35 degrés & 16 minutes, & son complément ou l'angle cherché ABD, de 54 degrés & 44 minutes.

PROBLEME IX.

Fig. 190.

321. Soit BC la poupe d'un vaisseau qui va dans la direction BC; l'on demande l'angle CBA, ou LAB, que le gouvernail AB doit faire avec la poupe, en sorte que le vaisseau tourne avec la plus grande vitesse possible.

L'on suppose ici que l'eau soit un fluide parfait, c'est-à-dire que les particules ne s'empêchent pas les unes les autres de frapper successivement le gouvernail; & il faut remarquer que cet angle n'est vrai que dans le premier instant du choc; car dès que la direction du vaisseau change, l'angle changera aussi.

* Art. 314.

Soit AK parallèle à BC, & KD perpendiculaire sur AB, & DH sur AK. Cela posé, l'effet de l'eau contre AB sera exprimé par $*KD^2$, & la force avec laquelle le gouvernail AB fait tourner le vaisseau, sera exprimée par DH. Ainsi si $AK = a$, $AD = x$, on aura $KD^2 = aa - xx$, & $DK : DH$, ou $AK : AD :: aa - xx : aax - x^3 =$ à l'effet de l'eau pour faire tourner le vaisseau, qui doit être un plus grand; & par conséquent $aa^2 - 3xx^2 = 0$, ou $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ainsi l'angle AKD sera de 35 degrés & 16 minutes, & l'angle cherché KAD de 54 degrés & 44 minutes.

Comme x a deux valeurs $\pm a\sqrt{\frac{1}{3}}$, l'une positive & l'autre négative, il est évident que si l'angle KAD est de 125 degrés & 16 minutes, ou le supplément de 54 degrés & 44 minutes, le vaisseau tournera également vite.

PROBLEME X.

Fig. 191.

322. Trouver la fluxion de la résistance des figures qui se meuvent uniformément dans un fluide parfait.

Soit ML la direction de la figure, & Mm une tangente à la figure en M ; cela posé, si ML exprime la force absolue d'une particule, le carré de la perpendiculaire Lm sur Mm exprimera la force relative avec laquelle cette particule frappe le point M : or en divisant la force Lm en la parallèle Lr , & la perpendiculaire mr en la direction de la figure, la dernière sera détruite par la réaction, & la première sera celle qui retarde le mouvement de la figure. Ainsi en faisant $ML = 1$, $Mm = z$, $mr = x$, $Mr = y$, on aura $Mm(z) : mr(x) :: ML(1) : Lm = \frac{y}{x}$, & $Lm : Lr$, ou $Mm(z) : mr(x) :: \frac{x}{z} : \frac{y}{x} =$ à la résistance du point M , laquelle étant multipliée par la fluxion $\dot{z}$ de la courbe, donnera $\frac{\dot{z}^3}{x}$ pour la fluxion demandée.

COROLLAIRE.

323. Si c exprime la circonférence dont le rayon est r , & $CP = x$, on aura $\frac{cx}{r}$ pour la circonférence du rayon x , & $\frac{cx^3}{rk^3}$ pour la fluxion de la résistance du solide décrit par la figure CAB autour de l'axe AC .

EXEMPLE I.

324. Soit ABC une demi-parabole dont l'équation est $zpy = xx$, on aura $\dot{z}^2 = \frac{y}{pp} \times \overline{pp + xx}$, & $\left(\frac{cx^3}{rk^3}\right) = \frac{x^3}{pp+xx} \times$ * Art. 222, $\frac{c p p}{r}$, dont la fluente $\frac{c p p}{r} \times \log. \frac{\sqrt{pp+xx}}{p}$ exprimera la résistance de la parabolôïde décrite autour de l'axe AC .

EXEMPLE II.

325. Soit ABC un quart de cercle, & $aa - xx = yy$ son équation; si $a = r$, on aura $\dot{z} = \frac{a}{y}$, & $\left(\frac{cx^3}{rk^3} = \frac{cx^3}{a^3}\right) = \frac{c}{a^3} \times y^3$ sera la fluxion de la résistance, dont la fluente $\frac{c}{4a^3} y^4$ donnera $\frac{a^4}{4}$ lorsque $y = a$, pour la résistance de la sphere, laquelle est par conséquent la moitié de celle de son grand cercle.

EXEMPLE III.

326. Soit AMB un quart d'ellipse, $CB = 1 = r$, $CA = a$, $CP = y$, & $aayy = aa - x^2$ l'équation, dont la fluxion $aayy' = -xx'$, donnera $x^2 + y^2 = y^2 + \frac{aay'y^2}{1-dy}$, d'où en faisant $aa - 1 = dd$, on aura $z^2 = y^2 \times \frac{1+ddy}{1-dy}$; & comme x est ici $= CP = y$, $\frac{ex^2}{r^2}$ sera $= \frac{ey^2}{r^2} = \frac{ey^2 - dy^2}{1+ddy}$, ou $= \frac{e}{dd} \times$ par $\frac{aayy}{1+ddy} - yy$, parce que $dd + 1 = aa$; & par conséquent si $L = \log. \sqrt{1+ddy}$, la fluente de cette fluxion sera $\frac{e}{dd} \times$ par $\frac{aa}{dd} L - \frac{1}{2}yy$; & lorsque $y = 1 = CB$, $\sqrt{1+ddy}$ deviendra $= a$; & $\frac{eaa}{dd} L - \frac{e}{2dd}$ exprimera la résistance du sphéroïde décrit autour du premier axe CA .

Si CA étoit le second axe, on aura $1 > a$, & $dd = (aa - 1)$ sera négative; ainsi $\frac{aa}{dd} L - \frac{e}{2dd}$ exprimera alors la résistance demandée.

EXEMPLE IV.

Fig. 191.

327. Soit DAB la section d'un cône décrit par le triangle ABC autour de l'axe AC ; si $AB = d$, $BC = a = r$, les triangles semblables BPM , BCA , donneront $BC(a) : BA(d) :: PC(x) : AM = z = \frac{dx}{a}$. Ainsi $\left(\frac{ex^2}{r^2}\right) = \frac{acxz}{dd}$ dont la fluente $\frac{acxz}{2dd}$ donnera $\frac{eaa}{2dd}$, lorsque $x = a$ pour la résistance demandée, laquelle est à celle de sa base $\frac{ae}{2}$, comme $\overline{CB^2}(aa)$ est à $\overline{AB^2}(d^2)$.

Fig. 191.

* Art. 325.

N. B. La résistance de la demi-sphère, dont le rayon est a , & sa circonférence c étant $= \frac{ac}{4}$, celle du cône inscrit sera aussi $= \frac{ac}{4}$, ce qui est remarquable.

PROBLEME XI.

Fig. 193.

328. Entre tous les cônes tronqués, décrits par le trapèze $ABCD$ autour de la base AD , qui ont la même base AB & la

même hauteur AD , & qui se meuvent dans la direction de l'axe AD , trouver celui de moindre résistance.

Soit BC prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe en E , & tirées AH , DF perpendiculaires sur CB . Cela posé, la résistance de la surface décrite par BE est à celle de la base décrite par AB , comme $* AB^3$ est à BE^3 , ou comme BH^3 est à AB^3 ; de même la résistance du cône retranché DEC , sera à celle de la base DC , comme CF^3 est à CD^3 . Donc la différence DF^3 des quarrés CD^3 , CF^3 exprimera la différence entre les résistances de la base CD , & du cône DEC . Par conséquent $DF^3 + BH^3$ doit être un moindre. Or si l'on mène DG parallèle à BC jusqu'à la rencontre de AH en G , on aura $HG = FD$, & $DF^3 + BH^3 = BG^3$. * Art. 317.

Mais il est clair que le point G sera toujours placé dans la circonférence du cercle décrite sur le diamètre AD ; & comme entre toutes les droites qu'on puisse mener d'un point fixe B à la rencontre de la circonférence de cercle AGD , celle qui étant prolongée passe par le centre O , sera la plus courte; il s'ensuit, puisque $OG = OD$, que si $OE = OB$, le point E sera le sommet du cône cherché.

PROBLEME XII.

329. L'on demande le solide de moindre résistance décrit par l'arc de cercle BM , & par les tangentes MN , AN , autour de la ligne OA de direction. Fig. 194.

Si $AO = 1$, $OP = x$, $PM = y$, on aura $* \frac{1}{4}y^4$ pour la résistance de la partie du solide décrit par $OBMP$, & $\overline{TM}^3$: $\overline{PM}^3$, ou $\overline{OM}^3 (1) : \overline{OP}^3 (xx) :: \overline{PM}^3 (yy) : xx yy = \frac{1}{4}y^4$ * Art. 317.
la résistance du cône décrit par PMT . De même $\overline{TN}^3 : \overline{AN}^3$; ou $\overline{OM}^3 (1) : \overline{OP}^3 (xx) :: \overline{AN}^3 : xx \overline{AN}^3 = \frac{1}{4}y^4$ la résistance du cône décrit par TAN . Ainsi $y^4 x^3 - x^3 \overline{AN}^3$ exprimera la résistance de la partie décrite par $PMNA$; & par conséquent $\frac{1}{4}y^4 + y^4 x^3 - x^3 \overline{AN}^3 + \overline{AN}^3$, exprimera la résistance totale. Mais $yy = 1 - xx$, & $AN = \frac{1-xx}{y}$ par la propriété du cercle.

Done cette résistance sera $= 1 + \frac{1}{4}xx - \frac{1}{4}x^4 - \frac{xx+x^3}{1+xx}$, dont

la fluxion étant $= 0$, donne $1 = 4x - 6x^3 - 3x^4$, & $x = \frac{28719}{98068}$. D'où l'on trouve l'angle ANT de 73 degrés *proximæ*, & non pas de 45 degrés, comme le dit M. le Chevalier Newton dans ses principes *Scholium*, après *prop. 34. liv. 2.*

COROLLAIRE.

330. Il est évident que $\frac{1}{2}y^4 + y^2x^2$, ou son égal $yy - \frac{1}{2}y^4$, exprimera la résistance du solide décrit par OBM T autour de OT, ce qui étant fait un moindre donne $2yy = 3y^3$, ou $\frac{2}{3}OM^2 = PM^2$.

PROBLÈME XIII.

331. Entre tous les solides décrits par l'espace OBNA, terminé par les droites données OA, OB, AN, & par une autre ligne BMN quelconque, autour de la ligne AO de direction, l'on demande celui de moindre résistance.

* Art. 321.

Soit $AP = x$, $PM = y$, $NM = z$, on aura $* \frac{xy^3}{x^4}$, ou seulement $\frac{y^3}{x^4}$ pour la fluxion de la résistance de la partie du solide décrit par PMNA, & si n exprime celle de la résistance de l'autre, il est évident que $\frac{y^3}{x^4} + n$ doit être un moindre.

Donc en supposant $\frac{y^3}{x^4}$ constante, on aura $\frac{3y^2y}{x^4} + n = 0$; & comme $z^2 = y^2 + x^2$, on aura $-y = \frac{xz}{y}$; cette valeur étant mise, donnera $\frac{3y^2z}{x^4} = n$. Or puisque la fluxion n doit être composée des parties semblables à celles du premier membre, & que la somme des abscisses OP, PA, étant constante, la seconde fluxion positive de l'une sera égale à la seconde fluxion négative de l'autre, il s'ensuit que $\frac{3y^2z}{x^4}$, ou $\frac{y^2z}{x^4}$ sera toujours égale à une quantité semblable; ou, ce qui est la même chose, cette quantité doit être toujours de même. Par conséquent, si a est une constante, on aura $y^2z = ax^2$ pour l'équation de la courbe.

COROLLAIRE I.

332. En mettant $y^2 + x^2$ au lieu de z^2 dans $y^2z = ax^2$, on aura $y^2y = ay^2 + ax^2$, & en faisant $x = \frac{y^2}{a}$, on trouvera
yy

$xy = aa + vv$, & si l'on met la valeur de la fluxion y prise dans cette dernière équation, dans $\dot{x} = \frac{vy}{a}$, on aura $\dot{x} = \frac{v^2}{a} - \frac{a^2}{a}$, dont la fluente sera $x = \frac{vv}{2a} - aLv$; Lv exprime le logarithme de v .

COROLLAIRE II.

333. Si l'on fait y un moindre, on trouvera $v = a$, cette valeur de v étant mise dans celle de y & de x , donnera $2a = y$, & $x = \frac{1}{2}a - La$. D'où l'on voit que la moindre appliquée AN est $\frac{1}{2}a$; & que si l'on veut que les abscisses commencent en A , il faut retrancher $\frac{1}{2}La$ de la valeur de x ci-dessus, pour avoir $x = \frac{vv}{2a} - \frac{1}{2}a + aL\frac{a}{v}$.

D'où l'on voit qu'en prenant v égale à différentes quantités arbitraires, on aura différentes valeurs pour x & y par le moyen desquelles on peut décrire la courbe. On observera que si l'on prend les logarithmes de $\frac{a}{v}$ dans les tables ordinaires, il les faut multiplier * par le logarithme hyperbolique de 10, c'est-à-dire * Art. 224 par 2,30258, &c.

PROBLEME XIV.

334. Trouver les points le plus haut & le plus bas de l'hélice Fig. 195: de la vis d'Archimède, l'angle AKB fait par la section AK d'un plan horizontal, & par le demi-cylindre $AMBDYE$ sur lequel l'hélice est formée, étant donné.

Soit $KSSA$ une section horizontale BMA , DYE , les demi-bases circulaires, CQ l'axe, $VRrA$ l'hélice, R un des points cherchés, $MPTS$ la section d'un plan qui passe par le point R , & qui est perpendiculaire au plan $ABDE$, & parallèle à l'axe CQ : cela posé, il est évident que PM & TS sont parallèles, & égales aussi-bien que PT & MS , puisque PM , TS sont dans le même plan $PMST$, & perpendiculaires au plan $ABDE$, & PT , MS sont toutes les deux perpendiculaires sur PM dans le même plan.

Si $AC = Bc = a$, $CP = x$, $PM = y$, $BV = d$, $BK = b$, AP sera $a + x$; & à cause des triangles semblables, AB ($2a$): BK (b):: AP ($a + x$): $PT = MS = \frac{ab + bx}{2a}$. Or la

Bb

nature de l'hélice est telle que la demi-circonférence $A m M B$ (c) est à la hauteur BV (d) de la vis, comme un arc quelconque AM (z) est à sa hauteur correspondante $MR = \frac{dz}{c}$. Donc

$MS - MR = RS = \frac{ab + bx}{2a} - \frac{dz}{c}$, ce qui doit être un plus grand; & par conséquent $\frac{bz}{2a} = \frac{dz}{c}$, mais on a $z = \frac{ax}{y}$, à cause du cercle; ainsi $\frac{bx}{2a} = \frac{adx}{cy}$, ou $y = \frac{2ad}{bc}$, & $x = \frac{a}{bc} \sqrt{bbcc - 4aadd}$.

D'où si l'on prend $CP = Cp = \frac{a}{bc} \sqrt{bbcc - 4aadd}$, & que l'on tire les perpendiculaires PM , pm , au diamètre AB , les perpendiculaires MS , ms , à la base du cylindre rencontreront l'hélice aux points R , r demandés.

Si l'on veut se servir de cette vis pour élever de l'eau, il faut que $bbcc$ soit plus grand que $4aadd$; car lorsque $bc = 2ad$, la partie concave de la vis entre les points R , r , deviendra nulle.

COROLLAIRE.

335. Si l'on suppose qu'une puissance N soit appliquée en B , dans la direction de la tangente BN à la base du cylindre en B , & que l'on tire par le point R le plus bas, la ligne RL perpendiculaire au plan horizontal $KSSA$, & dans ce même plan la ligne FR perpendiculaire à MR ; & soit enfin tirée de l'axe CQ , la ligne GH perpendiculaire à FR prolongée. Cela posé, si RL (p) exprime la pesanteur de l'eau, la droite FR , terminée par la perpendiculaire LF à FH , exprimera son effort dans la direction FR , ou BA ; & comme FR est dans un plan qui est parallèle au plan ABK , on aura $GH = TS = PM = \frac{2aad}{bc}$, & à cause des triangles semblables ABK , LFR , on aura AK (r) : BK (b) :: RL (p) : $FR = \frac{bp}{r}$. Ainsi le produit $\frac{2aadp}{r}$ du levier GH multiplié par la puissance FR , doit être égal au produit aN de la puissance N , multipliée par son levier BC , dans le cas d'équilibre; savoir $rcN = 2adp$.

Or en tirant BX parallèle, & DX perpendiculaire à la ligne horizontale AK , les triangles semblables ABK , DXD , donneront AK (r) : AB ($2a$) :: BD (n) : DX (m), ou $r = \frac{2an}{m}$. En mettant cette valeur dans $rcN = 2adp$, on aura $ncN =$

mdp. Enfin par la nature de l'hélice, la demi-circonférence $A m M B (c)$ est à la hauteur $B V (d)$, comme la demi-circonférence (c) multipliée par le nombre (s) des tours de l'hélice avant d'arriver en D , est à la longueur $B D (n)$ du cylindre, ou $d = \frac{n}{s}$. D'où l'on tire $s c N = m p$; ce qui montre que la puissance N est au poids p comme la hauteur $m (D X)$ est au chemin $(c s)$ parcouru par l'eau.

PROBLEME XV.

336. Soit l'extension d'un ressort parfait toujours comme la Fig. 196: longueur plié, l'on demande une courbe $D M V$ telle que la surface qu'elle décrit autour de l'axe $C X$ soit telle qu'une chaîne parfaitement flexible & sans pesanteur étant roulée dessus, soutienne par-tout le ressort également.

Si les droites $K E$, $X L$ perpendiculaires sur $C X$, expriment les tensions du ressort aux deux bouts, en tirant $L E$ jusqu'à la rencontre de $K X$ en C . Cela posé, si $C K = a$, $K E = b$, $K P = x$, $P M = y$, les triangles semblables $C K E$, $C P N$, donneront $C K (a) : K E (b) :: C P (a + x) : P N = \frac{ab + bx}{a}$. Cette force $P N$ étant multipliée par son bras de levier $P M (y)$, doit toujours être de même, c'est-à-dire égale à une quantité constante m .

Ainsi $a m = a b y + b x y$, sera l'équation de la courbe cherchée. Lorsque $x = 0$, on aura $\frac{m}{b} = y = K D$; & comme $K D$ est arbitraire, nous la supposons $= a$, ce qui donne $m = a b$, & $a a + a y + x y$ sera l'équation, qui est celle de l'hyperbole ordinaire, $C X$ une asymptote, & C le centre.

Si la loi des tensions étoit telle que $\overline{P N}^n$ exprime l'effort en M , on aura $\overline{P N}^n = \frac{b^n x^n + x^n}{a^n}$, & $a^{n+1} = y \times a + x^n$ pour l'équation de la courbe.

PROBLEME XVI.

337. Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible $D A K$, fixée par les bouts dans un plan vertical, sera étant pressée en chaque point par des puissances quelconques dont la loi est donnée.

Bb ij

Cas I. Soit tirée la droite OT, en sorte qu'elle coupe DK à angles droits au milieu B, & rencontre la courbe en A; & d'un point quelconque M de la courbe, soit tirée la tangente MT, & l'appliquée MP à l'axe AB; enfin soit achevé le rectangle MHTP. Cela posé, la puissance dans la direction MH, ou PT, sera aux puissances dans les directions TM, TH des tangentes aux points M & A, comme MH est à TM & TH; ou si d'un point O pris à volonté dans l'axe AB prolongé, l'on tire la ligne Og perpendiculaire à la tangente TM, laquelle coupe DK en E, comme la ligne BE est aux lignes * OE & OB, qui sont perpendiculaires à leurs directions. De même, si la ligne Oh perpendiculaire à la tangente en m, coupe DK en F, la puissance appliquée en m dans une direction perpendiculaire à DK, sera aux puissances dans les directions des tangentes TM, mh, comme EF est à EO & FO. Or comme cela arrive toujours, il s'ensuit que la puissance appliquée en M dans la direction MH perpendiculaire à DK, sera comme la fluxion de la ligne correspondante BE.

Si AP = x , PM = y , BO = a , BE = u , & l'arc AM = z , les triangles semblables BOE, PMT, donnent PM (y) :: PT (x) :: BO (a) : BE = $u = \frac{a^2}{y}$, dont la fluxion sera $\dot{u} = \frac{a^2 \dot{x} - a^2 \dot{y}}{y^2}$. Or comme $\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, dont la fluxion en prenant $\dot{z}$ fera $-\frac{\dot{z}^2}{z} = \dot{x}$; on aura $\dot{u} = \frac{a^2 \dot{z}^2}{\dot{z} y^2}$, parce que $\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

Cas II. Soit tirée HR perpendiculaire à TM, & soit achevé le rectangle R MSH, on aura HM est à SM, ou TM est à TH, comme la puissance $\dot{u}$ dans la direction HM est à la puissance n dans la direction SM, ou $n = \frac{\dot{u} y}{\dot{z}}$. Mais à cause que les directions SM des puissances perpendiculaires à la courbe ne sont pas parallèles entr'elles, il y a une partie de leurs forces détruite par des forces contraires. C'est pourquoi si l'on tire SV perpendiculaire à MH, on aura MS à MV, ou MT ($\dot{z}$) à TH (y), comme la puissance $n = \left(\frac{\dot{z} y}{\dot{z}}$) dans la direction MS est à son effet $\frac{\dot{u} y}{\dot{z}}$; ou à cause que $\dot{u} = \frac{a^2 \dot{z}^2}{\dot{z} y^2}$, cet effet sera $n = \frac{a^2 \dot{z}^2}{\dot{z} y^2}$.

$\frac{a^2 \dot{z}^2}{\dot{z} y^2}$.

* Art. 304.

E X E M P L E I.

338. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible sera étant pressée par l'atmosphère de l'air.*

Par la nature des fluides la pression se fait par-tout perpendiculairement à la surface pressée, & elle est toujours comme le produit de cette surface multipliée par la hauteur du fluide; & comme la différence entre les hauteurs des colonnes d'air qui pressent deux points différens A, M de la ligne, est si petite, eu égard aux mêmes hauteurs, qu'on la peut négliger sans aucune erreur sensible, c'est pourquoi la fluxion z de la courbe multipliée par la hauteur de l'atmosphère $= 1$, doit être égale $\frac{ay}{z}$.

Ainsi $ay = xz$, dont la fluente, à cause de z constante, sera $ay = xz$, ou $\frac{ay^2}{x^2} = z^2 = x^2 + y^2$; d'où l'on tire $y =$

$$\sqrt{\frac{ay^2}{x^2} - x^2}, \text{ dont la fluente sera } y = A - \sqrt{aa - xx}.$$

Mais lorsque $y = 0$, on aura aussi $x = 0$: donc $A = a$; par conséquent $a - y = \sqrt{aa - xx}$; ou $xx = 2ay - yy$ sera l'équation de la courbe, laquelle est par conséquent un cercle.

E X E M P L E II.

339. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible sera étant remplie par un fluide homogène.*

Si $BP = x$, xz exprimera la puissance appliquée en M dans la direction SM; donc $xz = \frac{ay^2}{x}$, ou en supplant l'homogenité $2xz = ay$, dont la fluente, à cause de z constante, sera $xxz = ay$, ou $\frac{ay^2}{x^2} = z^2 = x^2 + y^2$; d'où l'on tire $x^2 = y^2 - \sqrt{a^2 - x^2}$ pour l'équation de la courbe.

E X E M P L E III.

340. *Trouver la nature de la courbe qu'une chaîne parfaitement flexible sera étant suspendue par ses bouts dans un plan vertical.*

A cause que toutes les particules de la chaîne sont supposées égales & de la même pesanteur, la force qui presse le point M verticalement, sera comme z . Ainsi $z = \frac{ay^2}{x^2}$, ou $x = \frac{ay^2}{z^2}$, dont

la fluente sera $x = A - \frac{ax}{y}$. Or au point le plus bas A, où $x = 0$, z & y deviennent égales; c'est pourquoi $A - a = 0$, ou $A = a$. Donc $ax = a y + x y$, dont le quarré sera $(ax)^2 = a^2 y^2 + a^2 x^2 = a^2 y^2 + 2ax y^2 + x^2 y^2$, d'où l'on tire $ax = y \sqrt{2ax + xx}$ pour l'équation de la courbe.

En mettant au lieu de $\frac{ax}{y}$ sa valeur dans $(u) = z = \frac{ax}{y}$, on aura $z = \sqrt{2ax + xx}$.

COROLLAIRE.

341. En réduisant $\sqrt{2ax + xx}$ en une suite infinie, on aura $y = \sqrt{2ax} \times \text{par } 1 - \frac{x}{12a} + \frac{3xx}{160a^2} - \frac{5x^3}{896a^3} + \&c.$ pour la fluente de $ax = y \sqrt{2ax + xx}$. En supposant, pour une plus grande facilité, $r = \sqrt{2x}$, $s = \frac{1}{12}x \sqrt{2x}$, $t = \frac{1}{160}x^2 \sqrt{2x}$, on aura $y = r a^{\frac{1}{2}} - s a^{-\frac{1}{2}} + t a^{-\frac{3}{2}} - \&c.$ d'où en supposant la suite $a^{\frac{1}{2}} = by + cy^{-1} + dy^{-3} + \&c.$ & en substituant les valeurs de $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$, dans celle de y , & en comparant les coefficients des termes homologues, on trouvera les valeurs des indéterminées b, c, d , &c. & par conséquent $a = \frac{27}{12} + \frac{1}{8}x - \frac{37x^2}{3600} - \frac{x^3}{1800} - \&c.$ Or en mettant les valeurs de x prise dans $z = \sqrt{2ax + xx}$ dans cette dernière équation, & en supposant $z = A M D$, & $y = D B$, on aura la valeur de la constante a , & par conséquent aussi celle de l'axe A B.

EXEMPLE IV.

342. Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible sera étant pressée par le vent qui souffle uniformément dans une direction perpendiculaire à D K.

Par la nature des fluides en mouvement, le quarré z^2 du sinus total est au quarré y^2 du sinus de l'angle d'incidence, comme la force absolue du fluide (1) est à la force relative $\frac{y^2}{x^2}$ contre le

* Art. 337. n. 2. point M; ainsi $z \propto \frac{y^2}{x^2} = \frac{ax}{x^2}$, ou $ax y = x^2 y^2$, ce qui est la même équation que dans l'exemple précédent.

COROLLAIRE I.

343. Il est évident que telle que la loi qui régit entre les puissances puisse être, & telles que soient leurs directions, on trouvera toujours une équation algébrique, ou du moins fluxionnaire, qui exprime la nature de la courbe.

Car si les directions étoient toutes différentes, on les pourroit toujours changer par la décomposition des forces, en d'autres qui soient perpendiculaires à la courbe, ou à la ligne D K.

COROLLAIRE II.

344. Il est aussi manifeste que si la nature de la courbe est donnée, on pourra toujours trouver le rapport qui régit entre les puissances qui agissent dans certaines directions, en sorte que leur pression fasse prendre à la ligne la courbe demandée, comme on verra dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

345. *Trouver le rapport entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires à D K, en sorte que la figure D A K soit un demi-cercle.*

Si $AB = DB = a$, $BP = x$, $PM = y$, on aura à cause du cercle $yy = aa - xx$, dont la fluxion sera $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$; en substituant cette valeur de $\dot{y}$ dans $u = \frac{ak}{y}$, on aura $u = -\frac{ak}{x}$, dont la fluxion sera $\dot{u} = \frac{ay\dot{x} - ax\dot{y}}{xx}$. Or si l'on nomme q la puissance appliquée en M, on aura $\dot{u} = q\dot{z} = \frac{ay\dot{x} - ax\dot{y}}{xx}$, ou parce que $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{y}$, & $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$, à cause du cercle, cette équation sera $\frac{aq\dot{x}}{y} = \frac{axx\dot{x} - ay\dot{x}^2}{yxx}$, ou $q = \frac{aa}{xx}$, parce que $aa = xx + yy$.

EXEMPLE II.

346. *Trouver le rapport entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires à D K, en sorte que la figure D A K soit une parabole.*

Soit $2px = yy$, l'équation de la parabole, on aura $p\dot{x} = y\dot{y}$,

ou $x = \frac{y}{p}$. Ainsi $u = \left(\frac{x}{y}\right) = y$, ou $u = y$, en supposant $a = p$. Or si q exprime la puissance appliquée en M , on aura $u = qz = y$, ou à cause que $*z = \frac{y}{p} \sqrt{pp+yy}$, on aura $qz = \frac{y}{p} \sqrt{pp+yy} = y$. D'où l'on tire $q = \frac{p}{\sqrt{pp+yy}}$.

N. B. Si chaque puissance q est considérée comme la pesanteur d'un vouffoir de voûte dont le centre de gravité est toujours placé dans la courbe que ces puissances seroient prendre à une ligne parfaitement flexible, agissant dans des directions perpendiculaires à DK , & que les joints soient perpendiculaires à la même courbe, il est manifeste que tous les vouffoirs seront en équilibre entr'eux. Car les directions des poids & des puissances seront exactement les mêmes, & par conséquent leurs efforts des uns contre les autres seront aussi de même.

PROBLEME XVII

Fig. 193.

347. Soit une ligne CH d'une pesanteur donnée, qui tourne autour du centre C , & qui est attachée par l'autre bout à un fil HER , qui passe par-dessus une poulie E , & soutient un poids cylindrique R par le moyen d'une courbe KMN dont on demande la nature telle que le poids R soit toujours en équilibre avec la ligne CH , en quelque position qu'elle puisse être.

Soit CB la position horizontale de la ligne CH , A le point de milieu ou le centre de gravité, & K le point touchant du poids R dans ce cas : cela posé, le produit du poids A par la distance CA du point d'appui C à sa direction, doit être égal au produit du poids R par la perpendiculaire CX à la direction BE dans le cas d'équilibre, c'est à-dire on doit avoir $CA \times A = CX \times R$, en supposant que A exprime la pesanteur donnée de la ligne CH .

Or lorsque cette ligne est dans quelqu'autre situation, comme CH , en tirant du milieu m & du centre du poids R les perpendiculaires mp , MP aux verticales CF , DK , on aura le produit du poids R multiplié par sa descente verticale KP , égal au produit du poids A multiplié par sa montée Cp verticale, ou $KP \times R = Cp \times A$; cette égalité étant multipliée par celle ci-dessus, donnera $CA \times KP = Cp \times CX$. D'où l'on tire cette construction.

Soit

Soit KP une quatrième proportionnelle aux lignes CA , CX & Cp , & tirée la perpendiculaire PM ; & soit tourné le fil autour de la poulie E , en sorte que son bout rencontre PM en quelque point M , lequel fera la place du centre du poids, on trouvera tant de ces points que l'on voudra: cela étant fait, on décrira de plusieurs points de cette courbe, comme centres, & avec un rayon égal à celui du poids cylindrique R , des cercles, & la courbe qui touchera tous ces cercles du côté de DK , sera celle demandée.

On peut rendre ce problème plus général en supposant un poids O , figure 199, au lieu de la ligne CH , figure 198, qui soit soutenu par une courbe quelconque BmF , en sorte que si B est la place du poids Q , lorsque le poids R est placé en K , on aura toujours $R:Q::CB::$ à la distance du point C à la direction du poids Q placé en B , & $R:Q::Cp:KP$; par conséquent l'une de ces courbes, & le rapport des poids étant donné, on pourra décrire l'autre courbe.

Ce problème a été proposé par M. Jean Bernoulli, & résolu par lui-même dans les *Acta Eruditorum* de Leipfick, année 1695, pag. 69, par M. le Marquis de L'hôpital dans les mêmes *Actes* & année, pag. 56 & 65; par Wolffius dans ses *Opera Math.* tome 2, pag. 87, par M. Belidor dans la Science des Ingénieurs, liv. 4 pag. 40. Ce dernier nomme la courbe KMN , figure 198, la *Sinusfoïde*; & il fait voir son application aux ponts-levis, pag. 43.

Tous ces auteurs ont considéré les poids Q , R comme des points; mais M. Belidor ayant trouvé neuf ponts à peu près pour le rayon du poids cylindrique R , il est évident que cette courbe KMN doit être décrite par le centre de gravité de ce poids; autrement elle ne fera point vraie.

PROBLEME XVIII.

348. Soit XY une masse de terre uniforme dans toutes ses parties; l'on demande la ligne de rupture DA , que le prisme ACD fera par son propre poids, n'étant point soutenu en AC , en supposant que la résistance causée par le poids & la tenacité des particules, soit au produit de la masse par DA dans un rapport donné.

Si du point fixe A l'on abaisse la perpendiculaire AB sur la ligne horizontale DC , & du point B la perpendiculaire BE sur Cc

AD; & si $DB=y$, $CB=b$, $AB=h$, on aura $AD=\sqrt{hh+yy}$, & $b+y \times \frac{1}{2}h$ pour la superficie ou pesanteur du triangle DCA; & à cause des triangles semblables ABE, DBE, on a $AB:AE$ ou $DA(\sqrt{hh+yy}):AB(h)::b+y \times \frac{1}{2}h:\frac{b+y \times hh}{2\sqrt{hh+yy}}$ = à l'effort du poids $b+y \times \frac{1}{2}h$, dans la direction AE opposée à celle de la résistance. Donc si r exprime le rapport de $DA \times DCA$, on aura $\frac{b+y \times hh}{2\sqrt{hh+yy}} = \frac{bb+by}{2r} \times \sqrt{hh+yy}$, dans le cas de l'équilibre. D'où l'on tire $rh=hh+yy$, ou $y=\sqrt{rh-hh}$, & $r=\frac{hh+yy}{h}$.

COROLLAIRE I.

349. De là il suit 1°. que si la quantité r est connue par quelque expérience, on trouvera la valeur de $DB(y)$, & ainsi la ligne de rupture DA. 2°. Au contraire le talut DA étant donné, on trouvera la valeur de $DB(y)$, & par conséquent celle de r . 3°. Enfin r doit être plus grande que h , autrement la résistance surpassera l'effort du poids, ce qui fera qu'il n'y aura point de rupture.

COROLLAIRE II.

350. Si $r=\frac{1}{2}h$, on aura $\frac{1}{2}hh-hh=\frac{1}{2}hh=yy$, ou $\frac{1}{2}h=y$; & l'angle CDA sera de 30 degrés. Mais si $r=2h$, on aura $2hh-hh=hh=yy$, ou $h=y$, & l'angle CDA sera alors de 45 degrés, comme M. Couplet, & après lui M. Belidor, l'ont supposé.

PROBLEME XIX.

351. Trouver la moindre racine d'une équation quelconque rationnelle, & qui ne contient qu'une quantité variable.

Il faut évaluer l'équation à l'unité, en sorte que l'équation générale $1=ax+bx^2+cx^3+\&c.$ puisse exprimer l'équation particulière; il faut ensuite prendre autant de termes arbitraires A, B, C, qu'il y a de racines dans l'équation, & multiplier ces termes par ordre renversé, chacun par le coefficient des termes de l'équation, & leur somme sera le terme suivant; comme, par exemple, $aC+bD+cA=D$, & $aD+bC+cB=E$.

$aE + bD + cC = F$, & ainsi de suite, ce qui donne, en supposant $A = B = 0$, & $C = 1$, 0. 0. 1. $a. aa + b. a^3 + 2ab + c. a^4 + 3aab + 2ac + bb. a^3 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc$, & l'avant dernier terme divisé par le dernier sera la racine cherchée *proximæ*. Ainsi $x = \frac{a^4 + 3aab + 2ac + bb}{a^3 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc}$.

Il faut remarquer que l'on approchera d'autant plus de la vraie racine, que l'on en continuera la suite, & que l'on doit toujours choisir des unités & des zeros pour les termes arbitraires A, B, C. Tout l'artifice de cette manière consiste à bien choisir les termes arbitraires, pour que la suite converge beaucoup; mais je crois qu'il n'y a que la pratique qui puisse indiquer le chemin le plus court.

DEMONSTRATION.

Si l'on réduit cette valeur de x en une suite infinie, on aura $x = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{2bb - ac}{a^3} - \frac{3abc - 5b^2}{a^4} + \&c$. Or comme on trouve la même chose en cherchant la valeur de x par le moyen des suites, il s'ensuit que l'on a trouvé la valeur approchante de la racine demandée.

EXEMPLE I.

352. Soit $1 = 7y - 7yy + 2y^3$, l'équation proposée, qui est celle de l'article 312, en supposant 0. 0. 1, on aura 7, $7 \times 7 - 7 = 42$, $42 \times 7 - 7 \times 7 + 2 = 247$, & ainsi de suite, ce qui donne la suite suivante, 0. 0. 1. 7. 42. 247. 1449. 8501. 49855. 292376. 1714649, & $y = \frac{192176}{1714649}$.

EXEMPLE II.

353. Soit $1 = 4x + 0 - 6x^3 - 3x^4$ l'équation, qui est celle de l'article 329, en supposant 0. 0. 0. 1, on aura 0. 0. 0. 1. 4. 16. 58. 205. 712. 2452. 8404. 28729. 98068, & $x = \frac{18789}{98068}$.

Il peut y avoir deux difficultés, l'une quand la moindre racine est négative, & l'autre lorsqu'elle est imaginaire. Dans le premier cas, il faut prendre les termes alternatifs, & leur racine quarrée donnera la moindre racine positive. Comme, par exemple, si $1 = -y + 4yy - 4y^3$, on aura la suite 1. 1. 0. -4. 36. -20. 148. -84. 596. -340. 2388, ce qui donne $yy = \frac{196}{1784}$, & $y = \frac{14}{131}$ *proximæ*, l'erreur n'étant que $\sqrt{\frac{1}{131}}$; car la ra-

Cc ij

cine est $\mp \frac{1}{2}$. On peut aussi trouver la moindre racine positive en supposant $x = y \pm a$; car quand on a x , on aura aussi y .

Lorsque la moindre racine est imaginaire, il faut supposer $x = y + a$, si la racine est positive; ou $x = y - a$, si elle est négative. Cette règle ne manquera jamais, pourvu que x soit assez petite.

Si par exemple $z = x + xx - x^3$, ou $1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x^3$, on aura 1. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $-\frac{1}{8}$. $-\frac{1}{16}$. &c. d'où l'on voit que la suite diverge. Mais si l'on suppose $x = 8z - 2$, on aura 1 $= 15z - 56z^2 + 64z^3$, ce qui donne 1. 1. 1. 23. 353. 4071. 42769. 436151, &c $z = \frac{42769}{436151}$, ce qui donne $x = -\frac{130110}{436151}$.

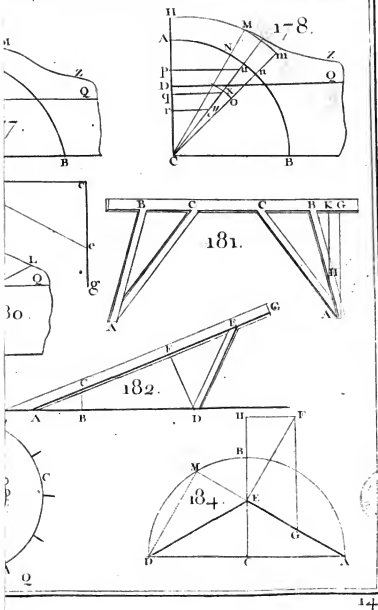
Si $1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x^3$, on ne trouvera rien selon la règle; mais si l'on fait $x = 13z + 3$, on aura $1 = 20z - 104z^2 - 169z^3$, d'où l'on forme la suite 0. 0. 1. -20 . 296. -4009 . 5:776. -688608 . 8960977. Ainsi $z = -\frac{688608}{8960977}$, &c $x = \frac{1778019}{8960977} = 2.0005$, *proxima*, la racine est $+z$.

Cette règle n'est pas moins utile pour extraire la racine d'un nombre quelconque; car si par exemple on veut extraire la racine quarrée de 26, en supposant $5 + y$ pour la racine demandée, on aura $26 = 25 + 10y + yy$, ou $1 = 10y + yy$, &c 0. 1. 10. 101. 1010. 10301. 104030, &c $y = \frac{10301}{104030}$; par conséquent $5 + \frac{10301}{104030} = 5.09901951360$ sera la racine cherchée vraie jusqu'à 10 figures.

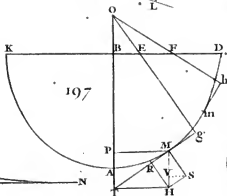
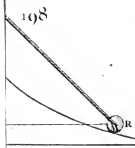
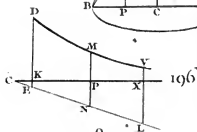
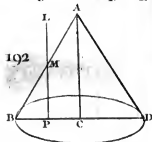
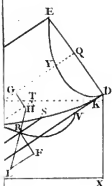
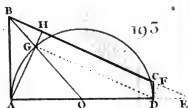
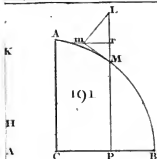
Cette règle sert encore pour trouver la valeur de y dans la suite infinie $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + \&c$. Car en divisant par z , on aura 1. $\frac{a}{z}$, $\frac{a^2}{z^2}$, $\frac{b}{z}$, $\frac{a^3}{z^3}$, $\frac{2ab}{z^2}$, $\frac{c}{z}$, $\frac{a^4}{z^4}$, $\frac{3aab}{z^3}$, $\frac{bb+2ac}{z^2}$, $\frac{a^5}{z^5}$, $\frac{4ab^2}{z^4}$, $\frac{3abb+3aac}{z^3}$, $\frac{2bc+2ad}{z^2}$; & par conséquent y

$$= \frac{a^2z + 2abxz + bb + 2ac, z^2 + dz^4}{a^3 + 4a^2bz + 3abb + aac, z^2 + 2bc + 2ad, z^3} \text{, ou bien } y = \frac{z}{a} - \frac{bbz + 2ac}{a^3} z^2 + \frac{5abc - 5b^2 - aad}{a^3} z^3 + \&c.$$

Si la suite étoit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \&c$. il faudroit la disposer ainsi, $1 = \frac{a}{z}y + 0 + \frac{b}{z}y^3 + 0 + \frac{c}{z}y^5 + 0 + \frac{d}{z}y^7 + \&c$. ce qui donnera 1. $\frac{a}{z}$, $\frac{aa}{z^2}$, $\frac{a^3}{z^3}$, $\frac{b}{z}$, $\frac{a^4}{z^4}$, $\frac{2ab}{z^3}$, $\frac{a^5}{z^5}$, $\frac{3aab}{z^4}$, $\frac{c}{z}$, $\frac{a^6}{z^6}$, $\frac{4a^3b}{z^5}$, $\frac{bb+2ac}{z^4}$, $\frac{a^7}{z^7}$, $\frac{5a^4b}{z^6}$, $\frac{3abb+3aac}{z^5}$, $\frac{d}{z}$, $\frac{a^8}{z^8}$, $\frac{6a^5b}{z^7}$, $\frac{60abb+4a^3c}{z^6}$, $\frac{2bc+2ad}{z^5}$; & par conséquent









$$y = \frac{2ax^7 + 1a^4bx^1 + 3a^2bb + 3aac, x^1 + dx^7}{a^3 + 6a^2bx + 6aab + 4a^1c, x^4 + 1bc + 1ad, x^6}, \text{ ou bien si l'on veut}$$

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^1}{a^2} + \frac{3bb - ac}{a^3} x^2 + \frac{3abc - 1bb^1 - aad}{a^4} x^3 + \&c.$$

Il est aisé de voir que la suite converge d'autant plus vite, que le premier coefficient a est plus grand.

PROBLEME. XX.

354. Trouver la plus grande racine d'une équation quelconque rationnelle, & qui ne renferme qu'une seule inconnue.

Il faut mettre l'inconnue élevée à la plus haute puissance d'un côté, & tous les autres termes de l'autre, en sorte que l'équation puisse être comparée avec la formule générale $x^n = a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} - - - - d$, & suivre la règle du problème précédent, excepté qu'il faut diviser le conséquent par son antécédent. Ainsi on aura 1. a , $a + b$, $a^1 + 2ab + c$, $a^2 + 3aab + 2ac + bb + d$, $a^3 + 4a^1b + 3aac + 3abb + 2bc + 2ad$, & $x = \frac{a^1 + 4a^1b + 3aac + 3abb + 2bc + 2ad}{a^2 + 3aab + 2ac + bb + d}$ pour la racine demandée.

La démonstration est la même que celle du problème précédent; & il y a aussi la même remarque à faire, qui est que la suite convergera d'autant plus vite que le coefficient a du second terme est plus grand.

EXEMPLE I.

355. Soit $x^4 = 4x^3 - 5xx + 2x - 1$, l'équation proposée. On aura la suite 1. 1. 1. 0. — 4. — 15. — 41. — 97. — 209. — 428. — 902. — 1983; & ainsi $x = \frac{1983}{902}$.

Comme il n'y a rien de si utile que de sçavoir trouver d'une manière aisée & générale les racines de toutes sortes d'équations, j'ai cru ne pouvoir mieux faire que de donner celle-ci, qui est sans doute la meilleure qu'on ait publiée jusqu'à présent, & dont le public est redevable au sçavant Daniel Bernoulli, comme on peut voir dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Petersbourg.

DE LA METHODE DES DIFFERENCES.

PROBLEME XXI.

356. Trouver la somme d'une suite de nombres quelconques a, b, c, d, e , dont il y a quelque rang de différences constantes.

Ayant soustrait le premier a du second b , le second b du troisième c , le troisième c du quatrième d , &c. on aura les différences premières $b - a, c - b, d - c, e - d$, &c. on soustraira la première différence $b - a$ de la seconde $c - b$, la seconde $c - b$ de la troisième $d - c$, &c. pour avoir les différences secondes ; on soustraira de même la première des secondes différences de la seconde, &c. la seconde de la troisième, &c. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on trouve quelque différence constante : cela fait, on posera ces différences comme on voit ci-dessous.

a	1 ^{re} . Diff.				
b	$b - a$	2 ^{me} . Diff.			
c	$c - b$	$c - 2b + a$	3 ^{me} . Diff.		
d	$d - c$	$d - 2c + b$	$d - 3c + 3b - a$	4 ^{me} . Diff.	
e	$e - d$	$e - 2d + c$	$e - 3d + 3c - b$	$e - 4d + 6c - 4b + a$	

En nommant la première des différences premières A , la première des secondes B , la première des troisièmes C , &c. on aura,

$$\begin{aligned} A &= b - a, \\ B &= c - 2b + a, \\ C &= d - 3c + 3b - a, \\ D &= e - 4d + 6c - 4b + a, \\ &\quad \&c. \qquad \qquad \&c. \end{aligned}$$

D'où l'on tire les valeurs des termes de la suite

$$\begin{aligned} a &= a, \\ b &= a + A, \\ c &= a + 2A + B, \\ d &= a + 3A + 3B + C, \\ e &= a + 4A + 6B + 4C + D, \\ &\quad \&c. \qquad \qquad \&c. \end{aligned}$$

D'où l'on voit 1°. que les coefficients de la valeur d'un terme quelconque, sont de même que ceux d'un binôme élevé à une puissance égale au nombre des termes qui la précèdent : par exemple, les coefficients de la valeur du quatrième terme d , sont de même que ceux d'un binôme élevé à la troisième puissance ; de même les coefficients de la valeur du cinquième terme e , sont de même que ceux d'un binôme élevé à la quatrième puissance.

D'où l'on peut tirer cette conclusion générale, que le $z + 1^{\text{me}}$ terme est $a + z A + z \times \frac{z-1}{1} B + z \times \frac{z-1}{1} \times \frac{z-2}{2} C + z \times \frac{z-1}{1} \times \frac{z-2}{2} \times \frac{z-3}{3} D + \&c.$

2°. Si dans la valeur d'un terme quelconque, l'on efface le premier terme a , & que la première différence A soit $= a$, la seconde $B = A$, la troisième $C = B$, &c. la valeur de ce terme ainsi changée, exprimera toujours la somme des termes qui la précèdent.

Par exemple, si dans $= a + 3 A + 3 B + C$, on ôte a , & que l'on fasse $A = a, B = A, C = B$, on aura $3 a + 3 A + B = a + b + c$. De même si dans $e = a + 4 A + 6 B + 4 C + D$, on ôte a , & si l'on fait $A = a, B = A, C = B, D = C$, on aura $4 a + 6 A + 4 B + C = a + b + c + d$.

Par conséquent si dans le terme général ci-dessus on ôte a , & que l'on fasse $A = a, B = A, C = B, D = C$, on aura $a z + z \times \frac{z-1}{1} A + z \times \frac{z-1}{1} \times \frac{z-2}{2} B + \&c.$ pour la somme de z termes, & dont le premier est a .

COROLLAIRE.

357. De là il suit qu'il est manifeste que dans toute suite de nombres dont la première différence est constante, on aura $a + z A$ pour terme général, & $a z + \frac{z \times z-1}{2} A$ sera la somme de z termes. Et dans toute suite de nombres, dont la seconde différence est constante, on aura $a + z A + \frac{z \times z-1}{2} B$ pour terme général, & $a z + z \times \frac{z-1}{1} A + z \times \frac{z-1}{1} \times \frac{z-2}{2} B$ sera la somme de z termes.

EXEMPLE I.

358. Soit 3. 5. 7. 9. 11. &c. la suite proposée, on aura $a = 3, A = 2, B = C = 0$, & par conséquent $3 z + z \times z - 1$, ou

$z \times z + 2$ sera la somme de z termes ; si l'on veut avoir 100 termes de cette suite, on aura $z = 100$, & 10200 pour la somme demandée.

E X E M P L E I I.

359. Soit 4. 9. 16. 25, &c. la suite proposée, en prenant les différences on aura les nombres ci à côté ; ainsi $a = 4$, $A = 5$, $B = 2$, $C = D = 0$; & par conséquent la formule générale devient ici $4z + 5z \times \frac{z-1}{2} + z \times z - 1 \times \frac{z-1}{3}$, ou $\frac{12z^3 + 92z^2 + 13z}{6}$; & lorsque $z = 4$, on aura 54 pour la somme de quatre termes.

E X E M P L E I I I.

360. Soit 1. 8. 27. 64. 125, &c. la suite proposée, dont les termes sont les cubes des nombres naturels. En prenant les différences, on aura les nombres à côté, & $a = 1$, $A = 7$, $B = 12$, $C = 6$, $D = 0$; par conséquent la somme générale devient ici $z + 7z \times \frac{z-1}{2} + 12z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-1}{3} + 6z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-1}{3} \times \frac{z-1}{4}$, ou $\frac{z^4 + 12z^3 + 22z^2 + 12z}{4}$. Si $z = 20$, on aura 44100 pour la somme de 20 termes.

P R O B L E M E X X I I.

361. La somme telle que $\frac{A}{z \times z + n. z + 1n. \dots z + xn}$ d'une suite infinie étant donnée, l'on demande le terme général de cette suite.

L'on suppose A , n , x des quantités constantes, & z variable ; n la différence des facteurs, dont le nombre est $x + 1$; les points entre les facteurs représentent le signe de multiplication, & l'on suppose la suite telle qu'en augmentant ou en diminuant chaque facteur de la différence commune n , on diminue ou augmente la somme d'un terme de la suite.

Cela posé, en augmentant chaque facteur de la différence commune n , on aura $\frac{A}{z + n. z + 1n. z + 2n. \dots z + xn + n}$ pour la somme de cette suite d'un terme moins que la première ; par conséquent

conséquent la différence de ces deux sommes, qui est

$$\frac{A}{x \cdot x + n \cdot x + 2n \cdot x + 3n \cdot x + \dots + nx + n} - \frac{A}{x + n \cdot x + 2n \cdot x + 3n \cdot x + \dots + nx + n},$$

ou $\frac{A}{x + n \cdot x + 2n \cdot x + 3n \cdot x} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x + n \cdot x + n}$, ou bien

$$\frac{n \times 1 + x \times A}{x \cdot x + n \cdot x + 2n \cdot x + \dots + nx + n} \text{ fera le terme général demandé.}$$

COROLLAIRE.

362. D'où il suit que si le terme général $\frac{n \times 1 + x \times A}{x \cdot x + n \cdot x + 2n \cdot x + \dots + nx + n}$ d'une suite telle que nous venons de supposer, est donnée, on trouvera la somme des termes à l'infini de cette suite, en rejetant le dernier facteur $x + nx + n$, & en divisant le reste par le produit $1 + x \times n$ de la différence commune n des facteurs, multipliée par le nombre $1 + x$ des facteurs restans.

Si le terme général contient plusieurs termes, on prendra la somme de chaque terme de la même manière que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

363. Soit $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \&c.$ continuée à l'infini, la suite proposée.

Il est clair que x est le terme général des premiers facteurs 1, 2, 3, 4, &c. & $x + 1$ celui des seconds 2, 3, 4, 5, &c. Ainsi le terme général de cette suite sera $\frac{1}{x \cdot x + 1}$. Car si l'on met les nombres 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de x , on aura les termes de la suite proposée. Donc en rejetant le dernier facteur $x + 1$, il restera $\frac{1}{x}$; & comme la différence commune est l'unité aussi bien que le nombre des facteurs restans, cette suite sera $= \frac{1}{x}$.

Si $x = 1$, on aura $1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \&c.$

Si $x = 2$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \&c.$

Si $x = 3$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \&c.$

Dd

E X E M P L E I I.

364. Soit proposée la suite $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} +$
&c. continuée à l'infini.

Le terme général des premiers facteurs 1, 2, 3, 4, &c. sera γ ; celui des seconds 2, 3, 4, 5, &c. sera $\gamma + 1$, & celui des troisièmes 3, 4, 5, 6, &c. sera $\gamma + 2$. Donc le terme général sera $\frac{1}{x \cdot x+1 \cdot x+2}$. Car en mettant 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de γ , on aura les termes de la suite. Ainsi rejetant le dernier facteur $\gamma + 2$, & en divisant le reste par 2, le nombre des facteurs restans, on aura $\frac{1}{1.2 \cdot x+1}$ pour la somme cherchée.

Si $\gamma = 1$, on aura $\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \text{\&c.}$

Si $\gamma = 2$, on aura $\frac{1}{12} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{\&c.}$

R E M A R Q U E S.

I. La suite commence toujours par le terme qui provient de la substitution de la valeur de γ dans le terme général. Comme, par exemple, lorsque $\gamma = 1$ dans la dernière suite, le terme général $\frac{1}{x \cdot x+1 \cdot x+2}$ devient $\frac{1}{1.2.3}$; & la somme de la suite commençant par le terme $\frac{1}{1.2.3}$, & continuée jusqu'à l'infini, sera $= \frac{1}{4}$, & ainsi des autres.

II. γ est toujours le moindre facteur de la suite, & le terme général doit avoir au moins deux facteurs. Car s'il n'y avoit que $\frac{A}{x}$, en rejetant le facteur γ , & en divisant le reste par 0 le nombre des facteurs restans, on aura $\frac{A}{0} = \infty$ pour la somme de la suite.

III. Lorsque les termes d'une suite sont si composés qu'on ne peut aisément voir quel est son terme général, il faut chercher celui des numérateurs, s'ils ne sont des unités, & les diviser par celui des dénominateurs. Car on peut toujours trouver les uns & les autres en prenant leurs différences de la même manière qu'on a fait pour trouver le terme général d'une suite de nombres entiers. Il faut néanmoins remarquer que si le nombre

des facteurs n'est pas constant dans tous les termes, on ne sauroit trouver le terme général par cette méthode.

IV. Quand on a le terme général d'une suite, il faut que z ne soit point multipliée par quelque autre nombre; & les facteurs doivent avoir la différence commune qui est entre les valeurs de z ; autrement on ne sauroit avoir la somme par ce qui a été dit, sans les réduire sous la forme du problème précédent.

PROBLEME XXIII.

365. Trouver la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{z \cdot z + m}$, & dont n est la différence commune des facteurs.

$$\text{Soit } \frac{1}{z + m} = \frac{a}{z + n} + \frac{b}{z + n \cdot z + 2n} + \frac{c}{z + n \cdot z + 3n} + \frac{d}{z + n \cdot z + 4n} + \&c.$$

L'on suppose ici, comme on fera toujours par la suite, que les points... entre les facteurs marquent les facteurs moyens qui manquent entre le premier & le dernier pour faire la progression.

En multipliant par $z + m$, on aura

$$1 = \frac{a \cdot z + m}{z + n} + \frac{b \cdot z + m}{z + n \cdot z + 2n} + \frac{c \cdot z + m}{z + n \cdot z + 3n} + \frac{d \cdot z + m}{z + n \cdot z + 4n} + \&c.$$

Et en faisant les divisions, il viendra

$$\begin{aligned} 1 &= a + \frac{a \cdot m - m}{z} - \frac{a \cdot n \cdot m - m}{z^2} + \frac{a \cdot n \cdot m - m}{z^3} - \&c. \\ &\quad \frac{b}{z} + \frac{b \cdot m - 3n}{z^2} - \frac{b \cdot n \cdot 3m - 7n}{z^3} + \&c. \\ &\quad \frac{c}{z^2} + \frac{c \cdot m - 6n}{z^3} - \&c. \\ &\quad \frac{d}{z^3} + \&c. \end{aligned}$$

D'où en faisant $a = 1$, & les coefficients des autres termes chacun $= 0$; cela donne

$$\begin{aligned} a &= 1. \\ b &= a \cdot \frac{n - m}{z}. \\ c &= b \cdot \frac{2n - m}{z}. \\ d &= c \cdot \frac{3n - m}{z}. \\ \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Dd ij

Par conséquent $\frac{1}{x+m} = \frac{1}{x+n} + \frac{n-m}{x+n} \cdot \frac{1}{x+3n} + \frac{2 \cdot 3 \cdot n - m}{x+n} \cdot \frac{1}{x+4n} + \&c.$ & en divisant par z , la suite se réduira à la formule de l'article 362, & dont on peut trouver la somme par le même article.

COROLLAIRE.

366. En faisant $m = 0$, & en divisant par z , on aura
 $\frac{1}{zx} = \frac{1}{x \cdot x+n} + \frac{n}{x \cdot x+n} \cdot \frac{1}{x \cdot x+3n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot n^2}{x \cdot x+n} \cdot \frac{1}{x \cdot x+4n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3}{x \cdot x+n} \cdot \frac{1}{x \cdot x+5n} + \&c.$

EXEMPLE I.

367. Soit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$ continué à l'infini la suite proposée.

Le terme général est $\frac{1}{xz}$, & les valeurs de z sont $1, 2, 3, 4, 5$, &c. Ainsi $n = 1$, & $\frac{1}{xz} = \frac{1}{x \cdot x+1} + \frac{1}{x \cdot x+2} + \frac{1 \cdot 2}{x \cdot x+3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x \cdot x+4} + \&c.$ dont la somme est $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot x \cdot x+2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot x \cdot x+3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot x \cdot x+4} + \&c.$ ou en faisant $A = \frac{1}{x}$, $B = \frac{A}{x+1}$, $C = \frac{2B}{x+2}$, $D = \frac{3C}{x+3}$, $E = \frac{4D}{x+4}$, &c. cette somme deviendra $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \&c.$

Cette dernière suite convergera d'autant plus vite que z est plus grand. Or si l'on fait $z = 1$, elle sera la somme de $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \&c.$ si $z = 2$, de $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ si $z = 3$, de $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$ D'où l'on voit que plus on prendra de termes de la première suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \&c.$ & plus vite convergera la dernière $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \&c.$

Si l'on prend la somme des douze premiers termes de la suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ on aura $1,564976638$, & en mettant la treizième valeur 13 de z dans la somme ci-dessus, on aura $A = \frac{1}{13}$, $B = \frac{A}{14}$, $C = \frac{2}{13}B$, $D = \frac{3}{16}C$, $E = \frac{4}{17}D$, &c. dont la somme de $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \&c.$ sera

.076913077

2747252

244200

34341

6464

1496

405

124

42

16

6

3

1

.079957427.

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus , donnera
1 , 644934065 pour la valeur de la suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$

E X E M P L E . I I .

368. Soit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.$ la suite proposée ,
laquelle exprime le logarithme hyperbolique de 2.

En soustrayant les termes négatifs des positifs , elle sera
 $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \&c.$ dont le terme général des premiers fac-
teurs 1, 3, 5, 7, &c. sera $\frac{1}{z}$, & celui des seconds 2, 4, 6, 8,
&c. sera $\frac{1}{z+1}$. Donc $\frac{1}{z(z+1)}$ sera le terme général de la suite ;
car les valeurs de z sont 1, 3, 5, 7, &c.

Ainsi en faisant $m = 1$, $n = z$, dans le terme général
 $\frac{1}{z(z+m)}$, on aura $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+2)} + \frac{1}{z(z+3)} + \frac{1}{z(z+4)} + \&c.$ dont la somme est $\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+4} + \&c.$ ou si $A = \frac{1}{z}$,
 $B = \frac{1}{z+1}$, $C = \frac{1}{z+2}$, $D = \frac{1}{z+3}$, $E = \frac{1}{z+4}$, &c. elle sera
 $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \&c.$

Or en prenant la somme des vingt premiers termes de la suite
 $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \&c.$

On aura, 50000. 00000. 00000

8333. 33333. 33333

3333. 33333. 33333

1785. 71428. 57143

1111. 11111. 11111

757. 57575. 75757

549. 45054. 94505

416. 66666. 66667

326. 79338. 56209

263. 15789. 47368

216. 45021. 64502

181. 15942. 02899

153. 84615. 38462

132. 27513. 22752

114. 94252. 87356

100. 80645. 16119

89. 12655. 97148

79. 36507. 93651

71. 12375. 53343

64. 10256. 41026

68080. 33817. 92694

Et en mettant la vingt-unième valeur 41 de γ dans la somme ci-dessus, on aura $A = \frac{1}{81}$, $B = \frac{A}{43}$, $C = \frac{3B}{45}$, $D = \frac{1C}{47}$, $E = \frac{7D}{49}$, &c. & la somme $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E +$ &c. donnera

01219.	51219.	51220
14.	18037.	43619
	63023.	88605
	5028.	50155
	574.	68589
	84.	51263
	15.	03459
	3.	10943
		72735
		18862.
		5341.
		1632.
		533
		185
		67
		26
		10
		4
		2
		1

01234. 37987. 67251

Cette somme étant ajoutée au nombre ci-dessus, donnera 69314. 71805. 59945, pour le logarithme hyperbolique vrai dans toutes les figures.

Il seroit impossible de trouver la somme de l'une ou l'autre de ces deux dernières suites par la seule addition des termes; car il faudroit en ajouter plus de 100000.00000.00000 termes pour avoir le logarithme hyperbolique de 2 vrai à 15 figures, comme nous venons de le trouver, & l'autre suite converge encore moins.

PROBLEME XXIV.

369. *L'on demande la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{x+x+m}$, & dont la différence commune des facteurs est n.*

Soit $\frac{1}{x+x+m} = \frac{a}{x+1n} + \frac{b}{x+2n} + \frac{c}{x+3n} + \frac{d}{x+4n} + \dots$ en multipliant par $x+x+m$, il viendra

$$E = \frac{a \cdot x + m}{x + 1 \cdot n} + \frac{b \cdot x + m}{x + 2 \cdot n \cdot x + 3 \cdot n} + \frac{c \cdot x + m}{x + 3 \cdot n \cdot \dots \cdot x + 4 \cdot n} + \frac{d \cdot x + m}{x + 4 \cdot n \cdot \dots \cdot x + 5 \cdot n} + \&c.$$
 & en réduisant chaque terme en une suite par une division continuelle, on trouvera

$$I = a + \frac{a \cdot m - 1 \cdot n}{x} - \frac{1 \cdot n \cdot a \cdot m - 1 \cdot n}{x \cdot x} + \frac{4 \cdot n \cdot n \cdot a \cdot m - 1 \cdot n}{x^3} + \&c.$$

$$\frac{b}{x} + \frac{b \cdot m - 1 \cdot n}{x \cdot x} - \frac{n \cdot b \cdot m - 1 \cdot n}{x^3} + \&c.$$

$$\frac{c}{x \cdot x} + \frac{c \cdot m - 9 \cdot n}{x^3} - \&c.$$

$$\frac{d}{x^3} + \&c.$$

D'où en supposant $a = 1$, & les coefficients des autres termes chacun égal à zero, on aura

$$a = 1.$$

$$b = 2 \cdot n - m.$$

$$c = b \cdot 3 \cdot n - m.$$

$$d = c \cdot 4 \cdot n - m.$$

$$e = d \cdot 5 \cdot n - m.$$

$$\&c. \quad \&c.$$

Par conséquent si l'on divise $\frac{1}{x+m} = \frac{a}{x+1 \cdot n} + \frac{b}{x+2 \cdot n \cdot x+3 \cdot n} + \&c.$ par $3 \cdot x + n$, on trouvera la somme par l'article 362.

PROBLEME XXV.

370. L'on demande la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{x^n}$, & la différence commune des facteurs n .

Soit $\frac{1}{x^n} = \frac{a}{x+n \cdot x+1 \cdot n} + \frac{b}{x+n \cdot \dots \cdot x+3 \cdot n} + \frac{c}{x+n \cdot \dots \cdot x+4 \cdot n} + \frac{d}{x+n \cdot \dots \cdot x+5 \cdot n} + \&c.$ En multipliant par $3 \cdot x$, & en réduisant chaque terme en une suite par une division continuelle, on trouvera

$$I = a - \frac{3 \cdot a \cdot n}{x} + \frac{7 \cdot a \cdot n \cdot n}{x \cdot x} - \frac{19 \cdot a \cdot n^3}{x^3} + \&c.$$

$$\frac{b}{x} - \frac{c \cdot b \cdot n}{x \cdot x} + \frac{15 \cdot b \cdot n \cdot n}{x^3} - \&c.$$

$$\frac{c}{x \cdot x} - \frac{10 \cdot c \cdot n}{x^3} + \&c.$$

$$\frac{d}{x^3} + \&c.$$

D'où

D'où en faisant $a=1$, & les coefficients des autres termes chacun égal à zero, on aura $a=1$, $b=3n$, $c=11nn$, $d=50n^3$, &c. Ces valeurs étant mises, & le tout étant divisé par z , on trouvera la somme demandée par l'article 362.

COROLLAIRE.

371. Si l'on veut avoir la somme du terme général $\frac{1}{z^4}$, en supposant $a=1$, $b=6n$, $c=35nn$, $d=225n^3$, &c. on aura $\frac{1}{z^4} = \frac{a}{z \cdot z + 3n} + \frac{b}{z \cdot z + 4n} + \frac{c}{z \cdot z + 5n} + \frac{d}{z \cdot z + 6n} + \&c.$

Pour avoir la somme du terme général $\frac{1}{z^5}$, en faisant $a=1$, $b=10n$, $c=85nn$, $d=735n^3$, &c. on aura $\frac{1}{z^5} = \frac{a}{z \cdot z + 4n} + \frac{b}{z \cdot z + 5n} + \frac{c}{z \cdot z + 6n} + \&c.$

Pour abréger ce travail on a construit la table suivante.

z^7	z^6	z^5	z^4	z^3	z^2	z^1	z^0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1
6	11	6	1	1	1	1	1
24	50	35	10	1	1	1	1
120	274	225	85	15	1	1	1
720	1764	1624	735	175	21	1	1
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36

La première colonne verticale contient les coefficients de la valeur de z^7 , la seconde ceux de z^6 , la troisième ceux de z^5 , &c.

Tout nombre est égal à la somme des colonnes au-dessus & à gauche, multiplié par le nombre au-dessus, plus le nombre qui est à gauche un degré au-dessus.

Par exemple, le nombre 11 de la seconde colonne est $= 1+2$
Ec

$\times 3 + 2$, c'est-à-dire une colonne à gauche, 2 au-dessus, leur somme 3 multipliée par le nombre 3 au-dessus, plus au nombre 2 au-dessus à côté. De même le nombre 85 de la quatrième colonne est $= 3 + 2 \times 10 + 35$, & le nombre 1764 de la seconde est $= 1 + 5 \times 174 + 120$, $120 = 0 + 5 \times 24 + 0$, $40320 = 0 + 8 \times 5040 + 0$.

Quand on a trouvé les coefficients par le moyen de cette table, il faut multiplier le premier par 1, le second par n , le troisième par nn , le quatrième par n^3 , &c. en supposant que n exprime la différence commune des facteurs, ou entre les valeurs de z .

PROBLEME XXVI.

372. La somme S d'une suite étant exprimée par $v^{l+m} \times$ par $\frac{a}{z} + \frac{b}{z \cdot z + n} + \frac{c}{z \cdot z + 2n} + \frac{d}{z \cdot z + 3n} + \&c.$ l'on demande la valeur du terme général T de cette suite.

En augmentant z de la différence commune n des facteurs, en nommant $\$$ cette nouvelle somme, on aura $\$ = v^{l+m} \times$ par $\frac{a}{z+n} + \frac{b}{z+n \cdot z+n} + \frac{c}{z+n \cdot z+2n} + \frac{d}{z+n \cdot z+3n} + \&c.$

$$\text{Mais } \frac{a}{z+n} = \frac{a}{z} - \frac{na}{z \cdot z + n}.$$

$$\frac{b}{z+n \cdot z+n} = \frac{b}{z \cdot z + n} - \frac{2nb}{z \cdot z + 2n}.$$

$$\frac{c}{z+n \cdot z+2n} = \frac{c}{z \cdot z + 2n} - \frac{3nc}{z \cdot z + 3n}.$$

$$\frac{d}{z+n \cdot z+3n} = \frac{d}{z \cdot z + 3n} - \&c.$$

$$\text{Donc } \$ = v^{l+m} \times \text{par } \frac{av^n}{z} + \frac{b - na, v^n}{z \cdot z + n} + \frac{c - 2nb, v^n}{z \cdot z + 2n} + \frac{d - 3nc, v^n}{z \cdot z + 3n} + \&c.$$

$$\text{La différence entre les sommes } S, \$, \text{ sera } = T; \text{ par conséquent } T = v^{l+m} \times \text{par } \frac{a - av^n}{z} + \frac{b - b + na, v^n}{z \cdot z + n} + \frac{c - c + 2nb, v^n}{z \cdot z + 2n} + \frac{d - d + 3nc, v^n}{z \cdot z + 3n} + \&c.$$

COROLLAIRE.

373. D'où il suit que si la valeur de T exprime le terme général d'une suite, la valeur de S exprimera la somme de cette suite.

EXEMPLE I.

374. Soit $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \&c.$ la suite proposée.

Le terme général des dénominateurs 1, 3, 5, 7, &c. sera $1 + 2z$, & celui des exposans 1, 2, 3, 4, &c. de x sera z . Donc $\frac{x^z}{1+2z}$ sera le terme général de la suite, ou en mettant $z = \frac{1}{2}$

pour z , ce terme sera $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+z}$, & les valeurs de z seront $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2},$ &c. Or en comparant ce terme général avec la valeur de T, on aura $n=1, m=-\frac{1}{2}, v=x, a=av^n=\frac{1}{2}, b=bv^n+\frac{1}{2}n b v^n=0, c=c v^n+\frac{1}{2}n b v^n=0, d=d v^n+\frac{1}{2}n c v^n=0,$ &c. ou $a=\frac{1}{1-x}, b=\frac{x}{x-1}, c=\frac{2x}{x-1}, d=\frac{3x}{x-1},$ &c. & par

conséquent $S = x^{\frac{1}{2}-1} \times \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x-1} + \&c.$

Soit par exemple $x = -1$, la suite $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \&c.$ deviendra $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \&c.$ qui exprime un arc de cercle de 45 degrés, dont le rayon est l'unité. Ce qui donne $S = \pm 1 \times$ par $\frac{1}{4z} + \frac{A}{1+z} + \frac{2B}{1+z} + \frac{3C}{1+z} + \frac{4D}{1+z} + \&c.$ en supposant que les lettres A, B, C, D, &c. expriment chacune le terme qui les précède.

Il y aura $+1$, lorsque $z = \frac{1}{2}$ est un nombre pair, & -1 , lorsque $z = \frac{1}{2}$ est un nombre impair.

Si l'on prend vingt termes de la suite $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \&c.$ ou dix de la suite $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \&c.$ on aura

66666. 66666. 66666
 5714. 28571. 42857
 2020. 20202. 02020
 1025. 64102. 56410
 619. 19504. 64396
 414. 07867. 49482
 296. 29629. 62963
 222. 46941. 04562
 173. 16017. 31602
 138. 60013. 86001

77290. 59516. 66959

Et en mettant la 21^{me} valeur $10 \frac{1}{2}$ de γ dans la suite $\frac{x}{42}$ &c.

$\frac{A}{12+2} + \&c.$ on aura $\frac{1}{42} + \frac{A}{43} + \frac{2B}{45} + \frac{3C}{47} + \frac{4D}{49} + \frac{5E}{51} + \&c.$
 &c.

01219. 51219. 51219
 28. 36074. 87238
 1. 26047. 77211
 8045. 60248
 656. 78387
 64. 39058
 7. 28950
 92775
 13021
 1986
 326
 57
 11
 2

01249. 22117. 30489

Ce nombre étant ajouté à la somme trouvée ci-dessus, donnera 78539. 81633. 97448 pour l'arc cherché, vrai dans toutes les figures.

EXEMPLE II.

375. Soit $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \&c.$ la suite proposée.

Le terme général sera $\frac{x^z}{z}$, & les valeurs de z , 1, 2, 3, 4, 5, &c. ce terme étant comparé avec la valeur de T , donne $m = 0$, $n = 1$, $v = x$, $a - ax = 1$, $b - bx + ax = 0$, $c - cx + 2bx = 0$, $d - dx + 3cx = 0$, ou $a = \frac{1}{1-x}$, $b = \frac{ax}{1-x}$, $c = \frac{2bx}{1-x}$, $d = \frac{3cx}{1-x}$, &c. Par conséquent $S = \frac{x^z}{1-x} + \frac{Ax}{x-1.x+1} + \frac{2Bx}{x-1.x+2} + \frac{3Cx}{x-1.x+3} + \frac{4Dx}{x-1.x+4} + \&c.$

Les lettres A, B, C, D , &c. expriment chacune le terme qui les précède.

Si $x = \frac{1}{2} = z$, la somme des onze premiers termes de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \&c.$ sera 22314.35508.95468.97546.89755, & en mettant la douzième valeur 12 de z dans la somme S , on aura $S = \frac{0.12}{3} - \frac{A}{4.13} + \frac{2B}{4.14} - \frac{3C}{4.15} + \frac{4D}{4.16} - \&c.$ ce qui donne

$$\begin{array}{r} + 4. 26666. 66666. 66666 \quad - 8205. 12820. 51282 \\ 293. 04029. 30403 \quad 14. 65201. 46520 \\ 91575. 09157 \quad 6733. 46261 \\ 561. 12188 \quad 51. 68228 \\ 5. 16822 \quad 55373 \\ 6292 \quad 752 \\ 94 \quad 12 \\ 2 \end{array}$$

$$- 8219. 84807. 68428$$

$$+ 4. 26960. 62837. 41624 \\ - 8219. 84807. 68428$$

$$+ 4. 18740. 78029. 73196$$

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 22314.35513.14209.75576.62951 pour la somme de la suite proposée, c'est-à-dire pour le logarithme hyperbolique de $\frac{1}{2}$.

Si x est négatif, on aura $-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \&c.$

& la somme de cette suite sera $\frac{-x^z}{1+x} + \frac{Ax}{1+x.x+1} + \frac{2Bx}{1+x.x+2} +$

$+ \&c.$ Par conséquent $S = -\frac{x^z}{1+x} - \frac{Ax}{1+x.x+1} -$

$\frac{2Bx}{1+x.x+2} - \frac{3Cx}{1+x.x+3} - \&c.$ sera la somme de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$

Si $x = \frac{1}{2} = .2$, la différence des onze premiers termes de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \&c.$ fera 18232. 15570. 82135. 64213. 56420, &c. en mettant la douzième valeur 12 de γ dans S, on aura $S = -\frac{0.1048}{6.12} - \frac{A}{6.13} - \frac{1B}{6.14} - \frac{3C}{6.15} - \frac{4D}{6.16} - \&c.$ ainsi

$$\begin{array}{r}
 - 2. 84444. 44444. 44444 \\
 3646. 72364. 67237 \\
 86. 82675. 34934 \\
 1. 89422. 51165 \\
 12059. 27132 \\
 591. 14075 \\
 32. 84115 \\
 2. 01656 \\
 13444 \\
 960 \\
 73 \\
 6
 \end{array}$$

$$- 2. 88181. 01592. 39241$$

Ce nombre étant retranché de la somme ci-dessus, donnera 18232. 15567. 93954. 62621. 17179 pour la somme demandée, c'est-à-dire pour le logarithme hyperbolique de $\frac{1}{2}$.

AUTREMENT.

En partageant la suite en ces deux suivantes $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \&c.$ & $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ le terme général de l'une & de l'autre est $\frac{x^r}{r}$, & les valeurs de γ sont 1, 3, 5, 7, &c. dans la première, & 2, 4, 6, 8, &c. dans la seconde. D'où en comparant $\frac{x^r}{r}$ avec T, on aura $m=0, n=2, \gamma=x, a-a\gamma^n=1, b-b\gamma^n+na\gamma^n=0, c-c\gamma^n+2nb\gamma^n=0, d-d\gamma^n+3cn\gamma^n=0$, ou $a=\frac{1}{1-xx}, b=\frac{1axx}{1-xx}, c=\frac{4bxx}{1-xx}, d=\frac{6cxx}{1-xx}$, &c. Par conséquent $S = \frac{x^2}{2-xx} - \frac{1Ax}{1-xx} + \frac{1Bxx}{1-xx} - \frac{4Bxx}{1-xx} + \frac{6Cxx}{1-xx} - \frac{8Dxx}{1-xx} + \&c.$

Si l'on suppose $x = \frac{1}{2} = .2$, les 8 premiers termes de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \&c.$ donneront,

20000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000.
266.	66666.	66666.	66666.	66666.	66667
6.	40000.	00000.	00000.	00000.	00000
18285.	71428.	57142.	85714.	28571	
568.	88888.	88888.	88888.	88889	
18.	61818.	18181.	84818.	18182	
	63015.	38461.	53846.	15385	
	2184.	53333.	33333.	33333	

20273. 25540. 54002. 22675. 10267. 51027

Et en mettant la neuvième valeur 17 de τ dans S, on aura
 $\frac{0^{\circ}. 31768}{24.17} - \frac{1A}{14.19} + \frac{4B}{14.11} - \frac{6C}{24.13} + \frac{8D}{24.15} - \&c.$ ce qui donne

+ 80.	31372.	54901.	96078.	- 35225.	31819.	74544
	279.	56601.	74401		3. 03876.	10591
		4051.	68141			62. 52595
		1.	07803			1028
			41			

				- 35228.	35758.	39758
+ 80.	31652.	15556.	46464			
	- 35228.	35758.	39758			

+ 79. 96423. 79798. 06706

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera
 20273. 25540. 54082. 19098. 90065. 57733. pour la somme
 de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \&c.$

La somme des 8 premiers termes de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^7 + \&c.$ sera

01000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
40.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
1.	06666.	66666.	66666.	66666.	66667
3200.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
102.	40000.	00000.	00000.	00000.	00000
3.	41333.	33333.	33333.	33333.	33333
	11702.	85714.	28571.	42857	
	409.	60000.	00000.	00000	

02041. 09972. 60112. 45714. 28571. 42857

Et en mettant la neuvième valeur 18 de γ dans la somme S, on aura $\frac{0^{11}.65536}{24.18} - \frac{1A}{24.20} + \frac{4B}{24.22} - \frac{6C}{24.24} + \frac{8D}{24.26} - \&c.$ ce qui donne

$$\begin{array}{r} + 15. 17037. 03703. 70370 \\ \quad 47. 88627. 01085 \\ \quad \quad 639. 50680 \\ \quad \quad \quad 15861 \\ \quad \quad \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 6320. 98765. 43210 \\ \quad 49881. 53136 \\ \quad \quad 9. 51647 \\ \quad \quad \quad 289 \end{array}$$

$$- 6321. 48656. 48282$$

$$\begin{array}{r} + 15. 17084. 92970. 38002 \\ - 6321. 48656. 48282 \end{array}$$

$$+ 15. 10763. 44313. 89720$$

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 02041. 09972. 60127. 56477. 72885. 32577. pour la somme de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \&c.$ laquelle étant ajoutée à celle de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \&c.$ donnera A, 22314. 35513. 14209. 75576. 62950. 90310. pour la somme de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ & en la retranchant de ladite somme, on aura B, 18232. 15567. 93954. 62621. 17180. 25156. pour la somme de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$

Si l'on suppose à présent $x = \frac{1}{10} = 1$, en prenant huit termes de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \&c.$ on aura

$$\begin{array}{r} 10000. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000 \\ 33. 33333. 33333. 33333. 33333. 33333 \\ 20000. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000 \\ 142. 85714. 28571. 42857. 14286 \\ 1. 11111. 11111. 11111. 11111 \\ 909. 09090. 90909. 09091 \\ 7. 69230. 76923. 07691 \\ 6666. 66666. 66666 \end{array}$$

$$10033. 53477. 31075. 58004. 21800. 42178$$

Et en mettant la neuvième valeur 17 de γ dans S, on aura

$$\frac{0^{14}.1}{99.17} - \frac{1A}{99.19} + \frac{4B}{99.21} - \frac{6C}{99.23} + \frac{8D}{99.25} - \&c. \text{ ce qui donne}$$

+

$$\begin{array}{r}
 + 59. 41770. 64765 \\
 \quad \quad 12. 15521 \\
 \quad \quad \quad 10 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - 6317. 67214 \\
 \quad \quad \quad 3202 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 59. 41782. 80296 \\
 \quad \quad - 6317. 70416 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - 6317. 70416 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$+ 59. 35464. 09880$$

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donne 10033.
 53477. 31075. 58063. 57265. 52058. pour la somme de la suite
 $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \&c.$

Or si l'on prend les huit premiers termes de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \&c.$ on aura

$$\begin{array}{r}
 00500. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000 \\
 2. 50000. 00000. 00000. 00000. 00000 \\
 \quad 1666. 66666. 66666. 66666. 66666 \\
 \quad \quad 12. 50000. 00000. 00000. 00000 \\
 \quad \quad \quad 10000. 00000. 00000. 00000 \\
 \quad \quad \quad \quad 83. 33333. 33333. 33333 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 71428. 57142. 85714 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 625. 00000. 00000
 \end{array}$$

$$00502. 51679. 26750. 72053. 57142. 85713$$

Et en mettant la neuvième valeur 18 de τ dans la somme S,
 on aura $\frac{0^{11}.1}{99.18} - \frac{1A}{99.10} + \frac{4B}{99.12} - \frac{6C}{99.14} + \&c.$ ce qui donne

$$\begin{array}{r}
 + 5. 61167. 22783 \\
 \quad \quad 1. 04103 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - 566. 83558 \\
 \quad \quad \quad 263 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 5. 61168. 26886 \\
 \quad \quad - 566. 83821 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 - 566. 83821 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$+ 5. 60601. 43065$$

Cette différence étant ajoutée au nombre ci-dessus, donnera
 00502. 51679. 26750. 72059. 17744. 28778. pour la somme
 de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \&c.$

Les sommes des deux suites donneront C. 10536. 05156. 57826. 30122. 75009. 80836. pour la somme de la suite de $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ ou pour le logarithme hyperbolique de $\frac{2}{10}$, & leur différence D. 09531. 01798. 04324. 86004. 39521. 23280. pour la somme de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ ou pour le logarithme hyperbolique de $\frac{11}{10}$.

De là puisque $\frac{1.1 \times 1.1}{.8 \times .9} = 2$; & comme les logarithmes de .8 & de .9 sont négatifs, en ajoutant la somme des logarithmes A & C au double de celui de B, on aura le logarithme de 2; & comme $\frac{1.1 \times 1.1}{.8} = 10$, $.9 \times 10 = 9$, $.11 \times 10 = 11$, $1.2 \times 10 = 12$, on aura

Nomb.

Logarithmes hyperboliques.

2.	69314.	71805.	59945.	30941.	72321.	21458
9.	2, 19722.	45773.	36219.	38279.	04904.	73848
10.	2, 30258.	50929.	94045.	68401.	79914.	54684
11.	2, 39789.	52727.	98370.	54406.	19435.	77964
12.	2, 48490.	66497.	88000.	31022.	97094.	79840

• E X E M P L E III.

376. Soit $x = \frac{7}{11}$, en prenant cinq termes de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ on aura

06666.	66666.	66666.	66666.	66666.	66666
9.	87654.	32098.	76543.	20987.	65432
	2633.	74485.	59670.	78189.	30038
	8.	36109.	47808.	47867.	26762
		2890.	25498.	59721.	02265

06676. 56963. 12250. 76187. 73431. 91163

En mettant la sixième valeur 11 de 7 dans la somme S, elle viendra $\frac{1}{11.224.15} - \frac{1A}{224.13} + \frac{4B}{224.15} - \frac{6C}{224.17} + \frac{8D}{224.19} - \frac{10E}{224.21} + \&c.$ ainsi

$$\begin{array}{rcl}
 + 10. 55693. 78546. 05893 & - & 725. 06441. 30910 \\
 & & 86317. 19203 \quad 136. 00392 \\
 & & 25565 \quad 54
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 + 10. 55694. 64863. 50661 & - & 725. 06577. 31356 \\
 - 725. 06577. 31356 & &
 \end{array}$$

$$+ 10. 54969. 58286. 19305$$

Ce nombre étant ajouté à la somme précédente, donnera 06676. 56963. 12261. 31157. 31718. 10468. pour la somme demandée, laquelle est le logarithme de $\sqrt{\frac{8}{7}}$, & par conséquent le double de cette somme étant retranché du logarithme de 8, donnera 1, 94591. 01490. 55313. 30510. 53527. 43440. pour le logarithme de 7.

Il y a d'autres suites pour trouver le logarithme de 7, & des autres nombres premiers qui convergent plus vite que celles dont on s'est servi ici; mais comme c'est principalement aux suites qui ne convergent que très-lentement qu'il faut appliquer la méthode des Différences, on a choisi celles qui convenoient le mieux à notre sujet.

E X E M P L E I V.

377. Soit $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^7 + \frac{1}{32}x^9 - \&c.$ dont les signes sont alternativement positifs & négatifs, en changeant cette suite en les deux suivantes $x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{16}x^7 + \frac{1}{32}x^9 + \&c.$ & $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{16}x^7 + \frac{1}{32}x^9 + \&c.$ dont le terme général de l'une & de l'autre est $\frac{x^z}{z}$, 1, 5, 9, 13, &c. les valeurs de z dans la première, & 3, 7, 11, 15, &c. dans la seconde.

En comparant $\frac{x^z}{z}$ avec le terme général T, on aura $m=0$, $n=4$, $v=x$, & $a - av^n = 1$, $b - bv^n + nav^n = 0$, $c - cv^n + 2nbv^n = 0$, $d - dv^n + 3ncv^n = 0$, ou $a = \frac{1}{1-x^4}$, $-b = \frac{4x^4}{1-x^4}$, $c = \frac{8bx^4}{1-x^4}$, $-d = \frac{12cx^4}{1-x^4}$, &c.

$$\begin{aligned}
 \text{Par conséquent } S &= \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{4Ax^4}{1-x^4 \cdot 2 + 4} + \frac{8Bx^4}{1-x^4 \cdot 2 + 8} \\
 &- \frac{12Cx^4}{1-x^4 \cdot 4 + 12} + \&c.
 \end{aligned}$$

Ff ij

Soit x la tangente d'un arc de cercle de 30 degrés, dont le rayon est l'unité, on aura $x = \frac{1}{3} \sqrt{3}$, & en multipliant la suite par 6, pour avoir la valeur de la demi-circonférence, on aura $\sqrt{12} \times$ par $1 + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.81} + \frac{1}{13.729} + \&c.$ pour la suite $x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ ou si $A = \sqrt{12}$, $B = \frac{1}{5}A$, $C = \frac{1}{7}B$, $D = \frac{1}{9}C$, &c. cette suite deviendra $A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{7}C + \frac{1}{9}D + \frac{1}{11}E + \&c.$ dont la somme des 13 premiers termes est $A. 3, 54623. 31721. 82093. 00410. 46758. 28940. 16197. 40688. \&c.$ en mettant la quatorzième valeur 53 de 7 dans la somme S , elle deviendra $\frac{\sqrt{12}}{2.53.3} - \frac{4A}{8.57} + \frac{8B}{8.61} - \frac{12C}{8.65} + \frac{16D}{8.69} - \&c.$ ce qui donne

$$\begin{array}{r}
 - 25375. 21915. 89785. 52857. 74518 \\
 9. 59970. 45998. 65782. 92222 \\
 952. 91886. 04194. 74183 \\
 1. 60424. 05057. 56620 \\
 381. 70957. 17598 \\
 1. 16361. 96900 \\
 427. 92238 \\
 1. 82397 \\
 876 \\
 \hline
 4 \\
 - 25384. 82840. 88477. 15641. 87626 \\
 \hline
 + 28. 92774. 98412. 35550. 25782. 95001 \\
 415. 98719. 93275. 17259. 96304 \\
 27825. 23072. 42486. 46151 \\
 37. 12670. 88475. 11981 \\
 7549. 36708. 59138 \\
 20. 52201. 99871 \\
 6912. 59222 \\
 27. 48125 \\
 12471 \\
 \hline
 64 \\
 + 28. 93191. 24994. 72138. 69855. 28328 \\
 - 25384. 82840. 88477. 15641. 87626 \\
 \hline
 + 28. 67806. 42153. 83661. 54212. 40702
 \end{array}$$

DES DIFFERENCES.

229

Cette différence étant ajoutée à la somme A, donnera B. 3.
 54623. 31721. 82121. 68216. 88912. 12601. 70410. 81390.
 pour la somme de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \&c.$

En supposant de même que ci-dessus, $A = \frac{1}{2}\sqrt{12}$, $B = \frac{1}{2}$
 $A, C = \frac{1}{2}B$, &c. la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{11}x^{11} + \&c.$ deviendra
 $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{11}C + \frac{1}{11}D + \&c.$ dont la somme des 13 pre-
 miers termes sera C. 40464. 05185. 92319. 22928. 49418.
 81754. 85827. 63949. & en mettant la quatorzième valeur 55

de 7 dans la somme S, elle deviendra $\frac{\sqrt{12}}{8.55.3} - \frac{4A}{8.52} + \frac{8B}{8.63} -$

$\frac{11C}{8.67} + \frac{16D}{8.71} - \&c.$ ce qui donne

— 7874. 52871. 89804. 01456. 93356
 2. 79833. 99854. 23028. 23629
 262. 75492. 82087. 35045
 42076. 05225. 24282
 95. 66362. 77054
 27971. 82097
 98. 98385
 40710
 189

— 7877. 32969. 07323. 06231. 74747

+ 9. 29194. 38883. 96873. 71918. 15970
 124. 99251. 93488. 95261. 22117
 7882. 64784. 62620. 51370
 9. 97803. 52484. 32976
 1934. 53113. 80427
 5. 03492. 77739
 1629. 42646
 6. 24222
 2736
 13

+ 9. 29319. 46028. 54890. 40526. 50216
 — 7877. 32969. 07323. 06231. 74747

+ 9. 21442. 13059. 47567. 34294. 75469

Cette différence étant ajoutée à la somme C, donnera D. 40464. 05185. 92328. 44370. 62478. 29322. 20122. 39418. pour la somme de la suite $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{11}x^{11} + \&c.$ Par conséquent la différence entre les sommes B & D, donnera 3, 14159. 26535. 89793. 23846. 26433. 83279. 50288. 41972. pour la demi-circonférence, vrai dans toutes les figures.

N. B. En prenant seulement la somme des treize premiers termes de la première suite, comme on vient de faire, on épargne vingt termes; & si l'on en prenoit davantage, on épargneroit beaucoup plus.

PROBLEME XXVII.

378. Soit $S = T \times \text{par } a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z \cdot z + n} + \frac{d}{z \cdot z + n \cdot z + 1n} + \&c.$ la somme d'une suite dont T est le terme général; l'on demande la relation entre deux termes successifs T, $\dot{T}$, de cette suite.

En mettant $\dot{S}$, $\dot{T}$, $\dot{z} + n$, pour S, T, z, on aura $\dot{S} = \dot{T} \times \text{par } a + \frac{b}{\dot{z} + n} + \frac{c}{\dot{z} + n \cdot \dot{z} + 1n} + \frac{d}{\dot{z} + n \cdot \dot{z} + 1n \cdot \dot{z} + 3n} + \&c.$ Par conséquent la différence entre S, $\dot{S}$, donnera la relation demandée.

EXEMPLE I.

379. Soit T, $\overline{z-m+p-1}$, $\dot{z} \dot{T} = 0$, la relation des termes successifs d'une suite, on aura $\dot{T} = \frac{m}{p-1 \cdot z} - \frac{1}{p-1} \times T$; cette valeur étant mise dans celle de $\dot{S}$, donnera

$$\dot{S} = \left\{ \frac{ma}{p-1} + \frac{mb}{p-1 \cdot z \cdot z + n} + \frac{mc}{p-1 \cdot z \cdot z + 1n} + \frac{md}{p-1 \cdot z \cdot z + 1n \cdot z + 3n} + \&c. \right. \\ \left. - \frac{1}{p-1} \times \text{par } a + \frac{b}{z+n} + \frac{c}{z+n \cdot z + 1n} + \frac{d}{z+n \cdot z + 1n \cdot z + 3n} + \&c. \right.$$

Or cette dernière partie de la valeur de $\dot{S}$, est $= \frac{-a}{p-1} + \frac{ma-b}{p-1 \cdot z} + \frac{m+n \cdot b-c}{p-1 \cdot z \cdot z + n} + \frac{m+1n \cdot c-d}{p-1 \cdot z \cdot z + 1n} + \&c.$

Par conséquent $S - \dot{S}$, ou $T = T \times \frac{ap}{p-1} + \frac{pb-ma}{p-1 \cdot z} + \frac{pc-b \cdot m+1n}{p-1 \cdot z \cdot z + n} + \frac{pd-c \cdot m+1n}{p-1 \cdot z \cdot z + 1n} + \&c.$

D'où en faisant $\frac{ap}{p-1} = 1$, $pb-ma=0$, $pc-b \cdot m+1n$

$$= 0, p d - c, m + 2n = 0, \text{ on aura } a = \frac{p-1}{p}, b = \frac{m}{p}, c = \frac{b \cdot m + n}{p}, d = \frac{c \cdot m + n}{p}, \&c.$$

Par conséquent la somme de cette suite sera $S = \frac{p-1}{p} T +$

$$\frac{A}{p} \times \frac{m}{p} + \frac{B}{p} \times \frac{m+n}{p} + \frac{C}{p} \times \frac{m+2n}{p} + \frac{D}{p} \times \frac{m+3n}{p} + \&c.$$

Soit par exemple $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \&c.$ la suite proposée; en faisant $a = 1, b = \frac{1}{2}a, c = \frac{1}{3}b, d = \frac{1}{4}c, \&c.$ l'on verra que si $\gamma - 2$ exprime un des numérateurs quelconques, γ exprimera le dénominateur correspondant; ainsi $\frac{2-2}{2}$

$T = -\frac{1}{2}$, ou $T, \gamma - 2 + \frac{1}{2}T = 0$, exprimera la relation entre deux termes successifs de cette suite; & les valeurs de γ sont 3, 5, 7, 9, &c.

En comparant cette équation avec $T, \gamma - m + p - 1, \gamma T = 0$, on a $m = 2, p - 1 = 1$, ou $p = 2, n = 2$. Par conséquent $S = \frac{1}{2}T + \frac{A}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{B}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{C}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{D}{2} \times \frac{1}{2} + \&c.$

Ce qui est la même valeur que nous avons trouvée ci-devant pour la même suite.

EXEMPLE II.

380. Soit $T = \frac{x-p}{x} \times \frac{x-m}{x-m+n} \times T$, la relation des termes

successifs, on aura $T = 1 - \frac{p}{x} \times \frac{x-m}{x-m+n} T$. Or si l'on suppose que la valeur de S soit multipliée par $\gamma - m$, celle de $\dot{S}$ sera multipliée par $\gamma - m + n$. Donc $S = \frac{\gamma - m}{\gamma - m + n}, T \times$ par $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x \cdot x + n} + \frac{d}{x \cdot x + 2n} + \&c.$ & $\dot{S} = \frac{\gamma - m + n}{\gamma - m + n}, \dot{T} \times$ par $a + \frac{b}{x \cdot x + n} + \frac{c}{x \cdot x + 2n} + \frac{d}{x \cdot x + 3n} + \&c.$

En mettant la valeur de T , on aura $\dot{S} = \frac{\gamma - m}{\gamma - m + n}, T \times$ par $\left\{ a + \frac{b}{x + n} + \frac{c}{x + n \cdot x + 2n} + \frac{d}{x + n \cdot x + 3n} + \&c. \right.$
 $\left. - \frac{p}{x} - \frac{p \cdot b}{x \cdot x + n} - \frac{p \cdot c}{x \cdot x + 2n} - \frac{p \cdot d}{x \cdot x + 3n} - \&c. \right.$

Et comme la première partie de cette valeur est égale à a ,
 $a + \frac{b}{x} + \frac{c - nb}{x \cdot x + n} + \frac{d - 2nc}{x \cdot x + 3n} + \&c.$

Par conséquent $\frac{1}{z-m}$, T $\times$ par $a + \frac{b-z}{z}$ +
 $\frac{c-z, p+n}{z, z+n} + \frac{d-z, p+2n}{z, z+2n} + \&c.$

Par conséquent la différence entre S, $\frac{1}{z-m}$, divisée par $\frac{1}{z-m}$,
 T donne $\frac{1}{z-m} = \frac{ap}{z} + \frac{p+n, b}{z, z+n} + \frac{p+2n, c}{z, z+2n} + \frac{p+3n, d}{z, z+3n} + \&c.$
 Et comme $\frac{1}{z-m} = \frac{1}{z} + \frac{m}{z, z+n} + \frac{m, m+n}{z, z+2n} + \frac{m, m+n, m+2n}{z, z+3n} +$
 $\&c.$

Si l'on compare les coefficients des termes correspondans des
 deux valeurs de $\frac{1}{z-m}$, on aura $1 = ap$; $m = p+n$; $b, m,$
 $m+n = p+2n$; $c, m, m+n, m+2n = p+3n$; d , ou

$$a = \frac{1}{p}.$$

$$b = \frac{m}{p+n}.$$

$$c = \frac{m, m+n}{p+3n}.$$

$$d = \frac{m, m+n, m+2n}{p+4n}.$$

Et si l'on fait $A = \frac{1}{z-m}$, T; $B = \frac{m}{z+n}$ A; $C = \frac{m+n}{z+2n}$ B;
 $D = \frac{m+2n}{z+3n}$ C, &c. on aura $S = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+n} + \frac{C}{p+2n} + \frac{D}{p+3n}$
 $\frac{E}{p+4n} + \&c.$ pour la somme de la suite dont l'équation qui
 exprime le rapport des termes successifs est $\frac{1}{z-m} \times$
 $\frac{z-m}{z+n} T.$

Soit par exemple $1 + \frac{1.1}{2.3} A + \frac{3.3}{4.5} B + \frac{5.5}{6.7} C + \frac{7.7}{8.9} D +$
 $\&c.$ la suite proposée, laquelle exprime la demi-circonférence
 d'un cercle dont le diamètre est l'unité. Si $\frac{1}{z-1}$ exprime un
 des numérateurs quelconques, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z+1}$ expriment les dénomi-
 nateurs; ainsi $\frac{1}{z} \times \frac{z-1}{z+1} T$ exprime la relation des
 termes successifs, & les valeurs de $\frac{1}{z}$ sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \&c.$

D'où l'on a $p = m = 1$, $n = 2$, & $A = \frac{1}{z-1}$, T, $B =$
 $\frac{1}{z+1} A$, $C = \frac{1}{z+2} B$, $D = \frac{1}{z+3} C$, $E = \frac{1}{z+4} D$, &c. Par
 conséquent $S = A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D + \frac{1}{5} E + \&c.$

Ceux

Ceux qui voudront approfondir davantage ce sujet, n'ont qu'à lire l'excellent Livre de M. Stirling, intitulé *Methodus differentialis*, à qui je suis redevable de ce que j'éctis ici sur ce sujet.

Application de la Méthode des Différences à la Quadrature des courbes.

Quand on ne peut pas trouver la fluente d'une expression fluxionnaire en un nombre de termes fini, ni la réduire à la quadrature des sections coniques, & que l'on est obligé de se servir des suites infinies, il arrive fort souvent que la suite ne converge que lentement ou point du tout; & alors il n'y a point d'autre moyen de résoudre la question, que par approximation, ce qui ne se peut mieux faire que par le problème suivant; & pour faciliter les opérations, on donnera une table, laquelle contiendra des espaces compris entre deux ou plusieurs ordonnées; & pour ne rien laisser à deviner au lecteur, on donnera plusieurs exemples pour bien concevoir l'usage de cette table.

PROBLEME XXVIII.

381. *Etant donné plusieurs ordonnées a, b, c, d, e, &c. d'une courbe, l'on demande de trouver l'espace compris entre la première & la dernière de ces ordonnées.*

En supposant $A = b - a$, $B = c - 2b + a$, $C = d - 3c + 3b - a$, $D = e - 4d + 6c - 4b + a$, &c. c'est-à-dire, si A, B, C, D, E, &c. expriment la première, seconde, troisième, quatrième différences, & l'inconnue τ , la distance de la première ordonnée à une autre quelconque, on aura $a + A\tau + B\tau \times \frac{\tau-1}{1} + C\tau \times \frac{\tau-1}{1} \times \frac{\tau-2}{2} + D\tau \times \frac{\tau-1}{1} \times \frac{\tau-2}{2} \times \frac{\tau-3}{3} + \&c.$ pour la valeur de cette ordonnée par le vingt-unième problème, qui sera toujours déterminée lorsque la distance τ est connue; par exemple, si $\tau = 0$, on aura le premier terme a ; si $\tau = 1$, on aura $a + A$, ou parce que $A = b - a$, le second terme b ; si $\tau = 2$, on aura $a + 2A + B$, ou c , c'est-à-dire le troisième terme, & ainsi des autres.

Or si l'on multiplie l'ordonnée $a + A\tau + \&c.$ par la fluente

Gg

xion de la base z , & qu'on prenne la fluente, on aura $a z + \frac{1}{2} A z z + \frac{1}{12} B z z z + \frac{1}{24} C \times z z - 2 z^2 + \frac{1}{72} D z z z \times 6 z^3 - 45 z z z + 110 z - 90 + \&c.$ pour la valeur de l'espace compris entre la premiere ordonnée & celle dont la distance est exprimée par z ; cette valeur sera toujours exprimée par autant de termes qu'il y a de valeurs de z , en y comprenant 0, comme on va voir.

E X E M P L E.

Soit $z=1$, l'expression ci-dessus deviendra $a z + \frac{1}{2} A z z$, ou en gardant z , $\frac{a+b}{2} z$. Si $z=2$, on aura $a z + \frac{1}{2} A z z + \frac{1}{12} B z z z \times 2 z - 3$, d'où en gardant z au lieu d'une de ces valeurs, & en y mettant celles de A , B , marquées ci-dessus, il viendra $a + b - a + \frac{c-3b+a}{6}$ multiplié par z , ou bien $\frac{a+b+c}{6} \times z$, après la réduction faite. Mais si $z=3$, on aura $a z + \frac{1}{2} A z z + \frac{1}{12} B z z z \times 2 z - 3 + \frac{1}{24} C \times z z - 2 z^2$; en gardant z au lieu d'une de ses valeurs, & mettant celles de A , B , C , il viendra $a + \frac{3b-3a}{2} + \frac{3c-6b+3a}{4} + \frac{a+3b-3c+d}{8}$, le tout multiplié par z , ce qui donnera après la réduction faite $\frac{a+3b+3c+d}{8} \times z$.

On trouvera de la même maniere la valeur des espaces lorsqu'il y a plusieurs ordonnées; mais pour épargner la peine de faire de longs calculs, on a construit la table suivante, où A exprime toujours la somme de la premiere & de la dernière ordonnée, B la somme de la seconde & de la pénultième, C celle de la troisième & l'antépénultième, ainsi du reste, & la dernière lettre les deux du milieu, si elles sont en nombre pair, ou celui du milieu si leur nombre est impair, & la lettre R exprime la base ou la distance entre la premiere & la dernière ordonnée.

Nomb. des
ordonnées.

Superficies.

III.	$\frac{A + 4B}{6} R.$
IV.	$\frac{A + 3B}{8} R.$
V.	$\frac{7A + 32B + 12C}{90} R.$
VI.	$\frac{19A + 75B + 50C}{188} R.$
VII.	$\frac{48A + 216B + 27C + 171D}{840} R.$
VIII.	$\frac{712A + 3577B + 1313C + 2989D}{17280} R.$
IX.	$\frac{989A + 5288B - 918C + 10496D - 4540E}{28350} R.$
X.	$\frac{2857A + 15741B + 1080C + 19344D + 1778E}{89600} R.$

Pour entendre l'usage de cette table, nous supposons l'ordonnée $\frac{1}{1+x}$ de l'hyperbole équilatérale par rapport aux asymptotes, & il s'agit de trouver l'espace entre la première ordonnée qui est l'unité, & celle qui est distante de ce premier d'une unité: ou, ce qui revient au même, il s'agit de trouver le logarithme hyperbolique du nombre 2.

Nous supposons neuf ordonnées, dont les distances ou les valeurs de x seront $\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$, & en mettant ces valeurs au lieu de x dans $\frac{1}{1+x}$, on aura $\frac{8}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{0}{8}$, ce qui donne $A = \frac{8}{8} + \frac{0}{16} = \frac{1}{1}$, $B = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{64}{64}$, $C = \frac{6}{8} + \frac{2}{16} = \frac{48}{64}$, $D = \frac{5}{8} + \frac{3}{16} = \frac{192}{64}$, $E = \frac{4}{8} + \frac{4}{16} = \frac{1}{1}$. En substituant ces valeurs dans la septième formule, ou opposée au nombre IX, & ayant l'unité pour la base R, on trouvera 69314711 pour la valeur cherchée, laquelle est vraie, excepté la dernière figure.

On trouvera d'autres exemples ci-après, où on traite du mouvement dans un milieu de résistance.

Messieurs Cotes & Stirling ont donné la même table dans leurs ouvrages sans en avoir donné la démonstration; & comme

Gg ij

elle est d'un grand usage dans les problèmes les plus difficiles, on a cru faire plaisir au lecteur en lui faisant voir comme elle a été construite, & son application.

PROBLEME XXXIX.

Fig. 101.

Si l'on suppose qu'un corps Q soit fixé en B à une ligne inflexible DB sans pesanteur, l'on demande la distance du centre d'oscillation d'un autre corps P fixé à la même ligne, au point de suspension D, en sorte que cette ligne tourne avec la plus grande vitesse possible.

Soient $DB = a$, $DA = x$, les distances des centres d'oscillation des corps Q (c), & P (d) au point de suspension D; & soit n la distance du centre d'oscillation commun C de ces corps au point D, on aura * $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$. Or il est évident que la vitesse du pendule augmente lorsque la longueur DC (n) diminue; c'est pourquoi la valeur de n doit être un moindre, ce qui donne $\frac{1acd + cxx}{ad + cx} - \frac{aad}{ad + cx} = 0$. D'où l'on tire $cx + \frac{2ad}{c}x - \frac{aad}{c} = 0$, ou $x = \frac{a}{c} \sqrt{cd + dd} - \frac{ad}{c}$.

* Art. 183.

COROLLAIRE I.

382. De là il suit que si l'on substitue cette valeur de x dans $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, on trouvera $n = \frac{2a}{c} \sqrt{cd + dd} - \frac{ad}{c}$; ce qui fait voir que $n = 2x$.

* Art. 181.

N. B. Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, on aura $n = a$; & lorsque x est infinie, n sera aussi infinie; & par conséquent cette équation ne contient qu'un moindre, * & point de plus grand.

PROBLEME XXX.

383. La distance (n) du centre d'oscillation d'une sphere au point de suspension D étant donnée, aussi-bien que le diamètre ($2a$) de la sphere, trouver la distance (d) de la sphere au point de suspension.

* Art. 196.

A cause que * $n = \frac{5dd + 10ad + 7aa}{5a + 5d}$, on aura $5an + 5dn = 5dd + 10ad + 7aa$, ou $dd + 2ad - nd = an - \frac{7}{5}aa$.

D'où en extrayant la racine quarrée, on trouvera $d = \frac{1}{2}n - a$
 $+ \sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}aa}$ pour la valeur cherchée.

PROBLEME XXXI.

384. Soient le centre commun C d'oscillation de deux corps P, Q, & celui du corps Q donnés; trouver la distance DA du corps P au point de suspension D.

La même chose étant supposée que dans l'article 304, on aura
 $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, ou $xx - nx = \frac{aad - aad}{c}$. D'où en extrayant la
 racine quarrée, on trouvera $x = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{aad - aad}{c}} + \frac{1}{4}n$
 pour la valeur demandée.

SECTION VI.

Des Roulettes ou Cycloïdes.

Comme les cycloïdes sont d'un grand usage pour la perfection des Horloges, on a cru devoir placer leur explication immédiatement après la section du centre d'oscillation; & comme leurs propriétés sont fort remarquables, il m'a paru qu'il conviendrait mieux d'en faire une section séparée, pour mieux s'appercevoir de leur connexion, que de les placer dans les différentes sections, comme on a fait à l'égard des autres courbes.

DEFINITION.

Si l'on conçoit qu'un cercle G M T roule sur une ligne droite ou courbe E G B, en sorte que toutes les parties de sa circonférence soient successivement appliquées à cette ligne, & que le point M placé dans quelque diamètre de cercle, décrive une courbe E M A pendant ce roulement, le tout dans le même plan & cela posé;

La ligne courbe E M A est nommée *roulette*; la ligne F G B sur laquelle le cercle roule, la *base*; le cercle mobile G M T, le *cercle générateur*; & la droite A B qui passe par le point tou-

Fig. 202, 203, 204.

chant B, & le point décrivant A, & en même tems par le centre du cercle, est nommée l'axe.

* Fig. 102.

Lorsque la base EGB est une droite, la courbe * EMAF est aussi nommée *cycloïde*; & lorsque la base est un arc de cercle, une *épicycloïde*.

Nous ne considérons ici que les roulettes dont la base est une droite, ou un arc de cercle.

COROLLAIRE I.

Fig. 102. 103.

385. De là il suit, I. que la partie EG de la base, entre le point de commencement E & le point touchant G, est continuellement égale à l'arc MG du cercle générateur entre ce même point E & le point décrivant M; & l'autre partie GB de la base, égale à l'arc MT, qui est la différence entre la demi-circonférence GMT & l'arc GM.

Fig. 102.

II. Si la ligne MQ perpendiculaire sur l'axe AB de la roulette dont la base est une droite, rencontre le diamètre GT du cercle générateur en P, il est clair que BG, ou son égale QP, sera = l'arc MT; & par conséquent $QM = PM + \text{l'arc MT}$.

* Art. 189.

III. La corde MG, dans toutes les roulettes, est perpendiculaire à la tangente MT en M. Car la différence entre les vitesses angulaires des points M & G, est comme le rayon * GM, & est aussi dans la direction perpendiculaire à ce rayon, aussi bien que dans la direction de la tangente MT.

COROLLAIRE II.

Fig. 102. 103.

386. Lorsque le point décrivant M est placé dans la circonférence du cercle générateur, si la droite bG exprime la fluxion de la partie EG de la base, ou de son égale de l'arc GM, la perpendiculaire ba sur GM exprimera la fluxion de la corde MT. Car soit la perpendiculaire MP = y sur GT, & GT = a, TP = x, on aura $TM = \sqrt{ax}$, & $\frac{ax}{2} = Gb =$ à la fluxion de l'arc MG; & à cause des triangles semblables TMP, Gba, on a $TM (\sqrt{ax}) : PM (y) :: Gb \left(\frac{ax}{2}\right) : ba = \frac{ax}{2\sqrt{ax}} = Gc$.

COROLLAIRE III.

387. Il est évident que $TP : TM$, ou $TM : TG :: \dot{x}$: *Fig. 105.*
 $\frac{ax}{\sqrt{ax}} =$ à la fluxion ($\dot{v}$) de l'arc AM ; & par conséquent la
 fluente $2\sqrt{ax} = 2TM =$ l'arc AM , & $2a = AME$.

Si la ligne TR est perpendiculaire sur la ligne OM tirée par *Fig. 105.*
 le centre O de l'arc EGB , & le point décrivant M ; & si OY est
 perpendiculaire sur TM prolongée, les triangles semblables OMY ,
 TMR , aussi-bien que TGM , TOY , donneront $TG(a) : TM$
 $(\sqrt{ax}) :: GO(b) : MY = \frac{b\sqrt{ax}}{a}$, & $MY(\frac{b\sqrt{ax}}{a}) : OM(\dot{z}) ::$
 $MR(\dot{z}) : \frac{ax\dot{z}}{b\sqrt{ax}} =$ à la fluxion ($\dot{v}$) de l'arc AM . Or comme
 $OP = b + a - x$, & $OP^2 + PM^2 = OM^2 = a + b^2 -$
 $ax - 2bx = \dot{z}\dot{z}$, ou $\dot{z}\dot{z} = \frac{a+1b}{2}\dot{x}$, il s'ensuit que $(\frac{ax\dot{z}}{b\sqrt{ax}}) =$
 $\frac{a+1b}{2} \times \frac{ax}{2\sqrt{ax}} = \dot{v}$, dont la fluente $\frac{a+1b}{2}\sqrt{ax} =$ arc AM , &
 $\frac{aa+1ab}{2} = AME$.

PROBLEME I.

388. Trouver la longueur du rayon MD de la développée, *Fig. 102. 103.*
 mené par un point donné M .

Puisque ba , ou son égale cG exprime la vitesse circulaire du
 point G à l'égard du rayon DG , & $\dot{v}$ celle du point M à l'égard
 du rayon MD , on aura $\dot{v} - cG : \dot{v} :: MG : MD$. C'est pour-
 quoi en substituant les valeurs de $\dot{v}$ * & de cG , on trouvera * *Art. 386.*
 $DM = 2GM$, figure 102. & $DM = \frac{a+1b}{a+b}GM$, figure 103. *387.*

Et en A ces rayons seront $MD = 2AB$, & $MD = \frac{aa+1ab}{a+b}$.

COROLLAIRE.

389. De là il suit que $cG + \dot{v} \times \frac{1}{2}GM$ sera la fluxion de
 l'espace EGM ; & comme $\dot{v} = 2cG$ * figure 102, & que $\frac{1}{2}cG \times$ * *Art. 387.*
 GM est la fluxion du segment circulaire GxM , on aura $\frac{1}{2}cG$
 $\times GM =$ à la fluxion de l'espace QEM , qui par conséquent

est triple du segment circulaire $G \times M$, & l'aire de la demi-roulette $B A M E$, triple du demi-cercle générateur.

* Art. 387. Dans la figure 203 on a $* \dot{v} = \frac{a+b}{b} c G$, & ainsi $\frac{a+b}{b} \times \frac{1}{2} G c \times G M$, sera la fluxion de l'espace $E G M$; & par conséquent $E G M = \frac{a+b}{b} \times G \times M$, & $A M E G B = \frac{a+b}{b} \times G \times M T G$.

PROBLEME II.

390. La même chose étant supposée, trouver la nature de la développée $F d I$ de la roulette.

Fig. 202. CAS. I. Soit $F H$ perpendiculaire sur la base $F B$, & $= A B$; & soit sur $F H$, comme diamètre, décrite la demi-circonférence de cercle $F L H$. Cela posé, si le rayon $m d$ de la développée rencontre la base en g , on aura $* g d = g m$; ainsi les arcs $m g$, $F L$, terminés par les lignes $m p$, $d L$ parallèles à $F B$, seront égaux, aussi-bien que $F g = L d$. Or comme $F g =$ l'arc $m g$, il s'ensuit que $L d$ est aussi l'arc $F L$; & comme cela arrive toujours, il est manifeste que la développée $E d I$ est une autre roulette égale à la première, & dont le sommet est en F , & $F H$ son axe.

Fig. 203. CAS II. Soit tirée $d k$ parallèle à $m t$; cela posé, puisque * Art. 388. $m d = \frac{a+b}{a+b} m g$, on aura $m d - m g = g d = \frac{b}{a+b} m g$; & à cause des triangles semblables $g m t$, $g d k$, on aura $g m : g t (a) :: d g (\frac{b}{a+b} m g) : g k = \frac{a b}{a+b}$, & $O g - g k = O k = \frac{b b}{a+b}$. Donc les lignes $O k$, $k g$ sont constantes, & par conséquent les points k , d , g , seront toujours dans la circonférence de cercle du diamètre $k g$.

C'est pourquoi si le cercle $k d g$ roule sur l'arc $f k I$ décrit du centre O avec le rayon $O k = (\frac{b b}{a+b})$, le point d décrira la développée, pendant que le point m décrit la roulette. D'où l'on voit que la développée $f k I$ est aussi une roulette dont le sommet est en F , & dont $O F$ est l'axe.

COROLLAIRE.

Fig. 204. 391. Si le cercle générateur $T M G$, au lieu de rouler sur la partie convexe d'un cercle, roule sur la partie concave $B G E$,

le sommet A tombera alors entre les points B & O, ce qui fait que AO (a) de positive qu'elle étoit, deviendra ici négative; on aura par conséquent * l'arc $AM = \frac{1}{b-a} TM$, $EMA =$ * Art. 387. $\frac{1}{b-a} a$, le rayon de la développée * $Md = \frac{1}{b-a} a$, $Gk =$ * Art. 388. $\frac{ab}{b-a}$, & $Ok = \frac{bb}{b-a}$.

PROBLEME III.

392. Soit AME la roulette ordinaire, sa base BE posée ho- Fig. 105.
rizontalement, & son sommet A vers le bas, l'on demande le tems de la description d'un arc quelconque AM, par un corps pressé par la seule gravité dans un milieu sans résistance.

Soit MP perpendiculaire sur l'axe AB; cela posé, puisque $\sqrt{AP}$ exprime la vitesse de la descente par AM, & $\sqrt{AP} = \frac{AN}{\sqrt{AB}} = * \frac{\text{arc } AM}{\sqrt{AB}}$, il s'ensuit, puisque $\sqrt{AB}$ est constant, que * Art. 387. les vitesses sont comme les longueurs parcourues; & par conséquent les tems sont constans. D'où l'on voit que si le corps commence son mouvement en quelque point quelconque M de la courbe, il arrivera toujours au point le plus bas A dans le même tems que le même corps, commençant son mouvement en E, décrira la demi-roulette EMA.

COROLLAIRE.

393. Si $AB = a$, $AP = x$, $\sqrt{a-x}$ ($= \sqrt{BP}$) exprimera la vitesse acquise dans la descente par EM; & $\frac{a-x}{\sqrt{a-x}}$ sera la fluxion de l'arc EM. Or la fluxion de la longueur parcourue divisée par la vitesse acquise à la fin du tems, sera égale à la fluxion de ce tems. Donc $t = \frac{a-x}{\sqrt{a-x}} \times \frac{1}{\sqrt{a-x}} = \frac{a-x}{\sqrt{a-x} \sqrt{a-x}}$; & comme $\frac{a-x}{\sqrt{a-x} \sqrt{a-x}}$ est la fluxion de l'arc de cercle BN ($= \tau$), on aura $t = \frac{\tau}{\sqrt{a}}$; ou en nommant T le tems de la descente par la demi-roulette, & la demi-circonférence ANB, il viendra $T = \frac{\tau}{\sqrt{a}}$.

Mais si l'on nomme BP , x : la fluxion $\dot{x}$ de la hauteur tombée BP , divisée par la vitesse $\sqrt{x}$, donnera $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}}$ pour la fluxion du tems π de la descente par l'axe AB , dont la fluente $2\sqrt{x}$ sera $= \pi$, $2\sqrt{a} = \pi$ exprimera le tems de la descente entière. Par conséquent $\pi : T :: (2\sqrt{a} : \frac{2c}{\sqrt{a}}) :: a : c$, & $\pi : 2T :: a : 2c$, c'est-à-dire le tems de la descente d'un corps par l'axe AB est au tems de la description de la roulette entière, comme le diamètre d'un cercle est à sa circonférence.

REMARQUE.

M. Huyghens a trouvé après plusieurs expériences répétées qu'un corps tomboir de 15 pieds 1 pouce $1 + \frac{7}{8}$ de ligne, ou $\frac{19164}{1196}$ parties de pieds, dans une seconde de tems, dans la latitude de Paris. Or comme les tems écoulés sont entr'eux comme les racines quarrées des hauteurs tombées, on aura $\sqrt{\frac{19164}{1196}} : 1 :: \sqrt{a} : \pi = \sqrt{\frac{1196a}{19164}}$, & $1 : 3.1415926 :: (\pi =) \sqrt{\frac{1196a}{19164}} : T = 3.1415926 \sqrt{\frac{1196a}{19164}}$, ou $T = 0.80858 \sqrt{a}$, & $a = 1.52954 T^2$.

Pour qu'un pendule décrive un arc de cycloïde, il faut que le fil de suspension se plie sur un autre arc de cycloïde *; & ainsi la longueur du pendule sera égale à la longueur de la demi-cycloïde, ou égale au double du * diamètre du cercle générateur. Donc connoissant la longueur du pendule dans une certaine latitude qui fait ses vibrations dans un tems donné, on pourra trouver la hauteur qu'un corps tombe en un certain tems dans cette latitude, & au contraire connoissant la hauteur d'où un corps tombe dans un certain tems, on pourra trouver la longueur du pendule qui fait ses vibrations dans un tems donné.

Par exemple, voulant avoir la longueur d'un pendule à secondes dans la latitude de Paris, on aura $T = 1$, & $2a = 3.05908$, ou 3 pieds 0 : 8 $\frac{1}{2}$.

PROBLEME IV.

394. Lorsque le point décrivant M n'est point dans la circon-

* Art. 390.

* Art. 387.

férence du cercle générateur, trouver la longueur du rayon MD de la développée, mené par un point donné M.

CAS I. Soit la base BE une droite; outre la construction de Fig. 106. 107.

la figure 102. soit de l'extrémité m du diamètre mn , dans lequel est placé le point décrivant, menée une perpendiculaire mp sur le diamètre CP, qui passe par le point touchant G, & d'un point quelconque T de la tangente MT, la droite TR perpendiculaire sur la parallèle MR à GP; cela posé, si GC, ou CM = a , CM = c , nM = $d = a + c$, mp = y , Cp = $a - x$, MG = n , les triangles semblables Cmp, CMP, donneront Cm (a): CM (c): Cp ($a - x$): CP = $\frac{ac - cx}{a}$: p m (y): PM = $\frac{cy}{a}$. Ainsi GC + CP = GP = $a + \frac{ac - cx}{a} = \frac{aa - cx}{a}$,

dont la fluxion $\frac{cx}{a}$ sera = MR. Or les triangles semblables

GPM, TRM donnent MP ($\frac{cy}{a}$): GM (n): MR ($\frac{cx}{a}$): MT

= $\frac{nx}{y}$, en supposant que MT exprime la fluxion de l'arc AM,

& les triangles semblables baG, GPM, donnent GM (n):

GP ($\frac{aa - cx}{a}$): * bG ($\frac{bx}{y}$): ba = $\frac{ad - cx}{ny}$. Par conséquent TM ^{Art. 308.}

= ba ($\frac{ny - ad + cx}{ny}$): MG (n): MT ($\frac{nx}{y}$): MD =

$\frac{nn - ad + cx}{ny}$.

CAS II. Outre la construction de la figure 103. soit du point Fig. 108. 109.

G tirée GQ perpendiculaire sur OY, & de l'extrémité m du

diamètre dans lequel est placé le point décrivant, soit aussi tirée

mp perpendiculaire sur OGP: cela posé, si OC = f , OG = b ,

OM = γ , & le reste comme dans la figure précédente, on aura,

à cause des triangles semblables cpm, CPM, PM = $\frac{cy}{a}$, GP

= $\frac{ad - cx}{a}$, & OP = $f + \frac{ac - cx}{a}$, ainsi ($\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$)

$\gamma\gamma = \frac{ccyy}{aa} + \frac{af + ac - cx}{aa}$, dont la fluxion $\gamma\dot{\gamma} = \frac{ccy\dot{y}}{aa} -$

$\frac{af\dot{\gamma} + ac\dot{\gamma} - c\dot{x}\gamma}{aa}$ deviendra $\gamma\dot{\gamma} = \frac{f\dot{\gamma}}{a}$, parce que $y\dot{y} = a\dot{x} - x\dot{x}$,

à cause du cercle. Or les triangles semblables GPM, OQG,

donnent MG (n): MP ($\frac{cy}{a}$): OG (b): GQ = MY =

$\frac{bcy}{aa}$, & les triangles semblables OYM, TRM, donnent YM

Hh ij

$\left(\frac{bcy}{na}\right) : MO(\tau) :: MR(\dot{z}) : MT = \frac{na\dot{z}}{bcy} = \frac{fn\dot{z}}{by}$. Et comme

* Cas I. nous avons trouvé * $ba = \frac{ad-cx}{ny}$ $\dot{x}$ dans la figure précédente, il s'enfuit que $TM - ba \left(\frac{fn\dot{z} - abd + bcx}{bny} \dot{x} \right) : MG(n) :: MT \left(\frac{fn\dot{z}}{by} \right) : MD = \frac{fn^3}{fnn - abd + bcx}$.

COROLLAIRE.

395. Lorsque $CM = Cm (a=c)$, on aura $d = (a+c) = 2a$, $nn = 4aa - 2ax$. Donc $MD = \frac{n^3}{nn - a\dot{d} + cx}$, deviendra $= \frac{n^3}{2aa - 2a\dot{x}} = 2n$; ce qui est la même chose que dans la figure 202. & $MD = \frac{fn^3}{fnn - a\dot{d} + bcx}$, deviendra $= \frac{n + \frac{b}{2}nx^3}{a + \frac{1}{2}bnx}$ $= \frac{2a + \frac{1}{2}b}{2a + \frac{1}{2}b} n$, ce qui est encore la même chose que ce que nous avons trouvé ci-devant figure 203. pour le même cas, parce que nm est là $= a$, & ici $= 2a$.

PROBLEME V.

396. Trouver la valeur de l'espace $BAMG$.

* Art. 394. Cas I. Puisque * $TM = \frac{fn\dot{z}}{by}$, & $ba = \frac{ad-cx}{ny} \dot{x}$, on aura $(TM + ba \times \frac{1}{2}GM) = \frac{fn\dot{z}}{by} + \frac{ad-cx}{2y} \dot{x} = \dot{v}$ pour la fluxion de cet espace. Or comme $GM^2 = CG^2 + CM^2 + 2CG \times CP$, * $CP = \frac{ac-cx}{a}$, on aura $nn = d\dot{d} - 2cx$, parce que $d = a+c$. En substituant cette valeur, on trouvera $\dot{v} = \frac{fdd + abd - acf - bcx}{2by} \dot{x}$, ou en supposant $\frac{fd + abd}{2b} = g$, & $\frac{acf + bc}{2b} = h$; cette fluxion deviendra $\dot{v} = \frac{g\dot{d}}{y} - \frac{hx}{y}$. Mais si l'arc $GN = u$, on aura à cause du cercle $x\dot{x} = a\dot{x} - y\dot{y}$, & $\frac{a\dot{x}}{y} = \dot{u}$; donc $\dot{v} = \frac{g\dot{d}}{y} - h\dot{u} + h\dot{y}$, dont la fluente sera $v = \frac{gu}{y} - hu + hy = BAMG$; & lorsque le point M arrive en E , le point G arrivera en F , & y sera $= 0$, $u =$ à la demi-circonférence $NGM = k$; & par conséquent $\left(\frac{gk}{a} - hk \right) = \frac{ddf + abd - acf - abc}{2ab}$ $\times k = BAMEFGB$.

COROLLAIRE.

397. Si l'on suppose que le centre O s'éloigne à une distance infinie, en sorte que la base FGB devienne une droite, on aura (fig. 6. 7.) $\frac{3c}{2} = h$, $\frac{dd+ad}{2} = g$, & par conséquent $\frac{dd+ad}{2a} u - \frac{3c}{2} u - \frac{3c}{2} y$ BAMG, & $\frac{dd+ad-3ac}{2a} k =$ BAEF.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes décrites par le roulement d'un cercle sur la partie convexe d'un autre arc de cercle, doit aussi s'entendre des roulettes décrites dans la partie concave de l'arc. Or comme il n'y a point d'autre différence, sinon que CM (c), & CG (a) de positives qu'elles étoient deviennent alors négatives, on ne s'arrêtera pas à en donner une démonstration particulière.

PROBLEME VI.

398. Trouver la valeur de la surface décrite par la roulette ordinaire AME, autour de la tangente AT en A. Fig. 205.

Si AB = a, AP = x, 2 ANB = c, on aura $\frac{2cx}{a}$ pour la circonférence du rayon AP, & $\frac{a^2}{\sqrt{ax}}$ pour la * fluxion de l'arc * Art. 327.

AM. Ainsi $\frac{2cx}{\sqrt{ax}}$ fera la fluxion de la surface décrite par l'arc AM, dont la fluente $\frac{4cx}{3a} \sqrt{ax}$ fera la valeur, & $\frac{4ac}{3}$ celle de la surface cherchée.

COROLLAIRE.

399. Il est évident qu'en divisant $\frac{4ac}{3}$ par l'arc AME (= 2a) on aura $\frac{2c}{3}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc AME, autour de AT, & 2c : a :: $\frac{2c}{3}$: $\frac{1}{3}a$ = à la distance de ce centre à la tangente AT, & $(a - \frac{1}{3}a) = \frac{2}{3}a$, égale à la distance à la base BE. Donc en multipliant l'arc AME (2a) par la circonférence $\frac{4c}{3}$ décrite par ce centre de gravité autour de la base, on aura $\frac{2}{3}ac$ pour la valeur de la surface décrite par l'arc AME autour de la base BE.

PROBLEME VII.

400. Trouver la valeur de la surface décrite par l'arc AME autour de l'axe AB.

Si $PM = z$, on aura $\frac{zx}{a}$ pour la circonférence du rayon PM, & $\frac{zx^2}{\sqrt{ax}}$ pour la fluxion de la surface décrite par l'arc AM. Or si

l'on suppose que $Az\sqrt{ax} + Bx\sqrt{aa-ax} + C\sqrt{aa-ax}$ soit la fluente cherchée, sa fluxion étant posée par ordre, sera à cause de $*z = \sqrt{ax} - xx + u$, l'arc AN étant $= u$, & $z =$

$$= \frac{ax - x^2}{\sqrt{ax} - xx}.$$

$$\frac{\frac{1}{2}Aaz\dot{x} + Aaax\dot{x} - Aax\dot{x}}{\sqrt{ax}} \Bigg| + \frac{Baa\dot{x} - \frac{1}{2}Bax\dot{x}}{\sqrt{aa-ax}} - \frac{\frac{1}{2}Ca\dot{x}}{\sqrt{aa-ax}}.$$

Or si l'on compare le coefficient du premier terme de cette fluxion avec celui de la fluxion proposée, & que l'on fasse les autres des termes homologues égal à zero, on aura $\frac{1}{2}Aa = 2c$, $Aa + Ba = \frac{1}{2}C$, $A = \frac{1}{2}B$, d'où l'on tire $A = \frac{4c}{a}$, $B = \frac{8c}{3a}$, $C = \frac{8c}{3}$; par conséquent $\frac{4cx}{a} - \frac{8cx}{3a}\sqrt{aa-ax} + \frac{8c}{3}\sqrt{aa-ax} - \frac{8ac}{3}$ sera la fluente complète, laquelle devient $\frac{4cx - 8ac}{3}$, qui est la valeur cherchée, parce que x devient $= a$, & $z = \frac{1}{2}c$.

COROLLAIRE.

401. Si l'on divise $\frac{4cx - 8ac}{3}$ par $2a$, on aura $\frac{3cx - 4ac}{3a}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc AME autour de l'axe AB; & $\frac{1}{2}c - \frac{1}{3}a$ pour la distance de cet axe; & par conséquent puisque $BE = \frac{1}{2}c$, $\frac{1}{3}a$ sera la distance de la tangente en E, & $\frac{4c}{3}$ pour la circonférence décrite par ce centre autour de cette tangente; ainsi $\frac{8ac}{3}$ sera la valeur de la surface

décrite par l'arc AME autour de la tangente en E.

D'où l'on voit que les distances du centre de gravité de l'arc AME, à la base BE & à la tangente en E, aussi-bien que les surfaces décrites par l'arc AME, autour de cette base & de cette tangente, sont égales chacune à chacune.

PROBLEME VIII.

402. Trouver la valeur du solide décrit par la partie extérieure AMET de la roulette autour de la tangente AT.

Soit MQ prolongée jusqu'à la rencontre de la tangente AT en p, on aura $pM = AP = x$, $Ap = PM = z = \sqrt{ax - xx} + u$, & $z = \frac{x}{\sqrt{ax - xx}}$, parce que $z = \frac{ax}{\sqrt{ax - xx}}$. Et comme $\frac{ax}{\sqrt{ax - xx}}$ exprime le cercle décrit par pM, on aura $\left(\frac{ax}{\sqrt{ax - xx}}\right) = \frac{ax}{\sqrt{ax - xx}}$ pour la fluxion du solide décrit par AMp. Si l'espace ANP, ou la fluente de $x\sqrt{ax - xx}$ est v ; $\frac{v}{2} - \frac{x}{3a} \times ax - xx$ sera la fluente de cette fluxion; & lorsque $x = a$, v devient $\frac{ae}{8}$, & $\frac{ae}{16}$ sera la valeur cherchée.

COROLLAIRE.

403. Si de la valeur $\frac{ae}{8}$ du cylindre décrit par le rectangle BT, l'on retranche $\frac{ae}{16}$, la différence $\frac{7ae}{16}$ sera la valeur du solide décrit par l'espace intérieur AMEB autour de la tangente AT.

Si l'on divise $\frac{7ae}{16}$ par le plan générateur $\frac{3ae}{8}$, le quotient $\frac{7}{16}c$ sera la valeur de la circonférence décrite par le centre de gravité de l'espace AMEB, & $\frac{7}{16}a =$ à la distance de ce centre à la tangente AT; & par conséquent $\frac{1}{16}a$ sera la distance à la base BE; ainsi la circonférence $\frac{7}{16}c$ du rayon $\frac{1}{16}a$, multiplié par le plan générateur $\frac{3ae}{8}$, donnera $\frac{7ae}{16}$ pour la valeur du solide décrit par l'espace AMEB autour de la base BE; & $\frac{3ae}{16}$ pour celui décrit par l'espace AMET autour de cette base.

PROBLEME IX.

404. Trouver la valeur du solide décrit par l'espace AMEB autour de l'axe AB.

On aura $\frac{c}{a} \gamma \gamma$ pour le cercle décrit par PM, & ainsi $\frac{c}{a} \gamma \gamma x$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace APM. Or si l'on suppose que $A \gamma \gamma x + B \gamma x \sqrt{ax - xx} + C \gamma \gamma + D \gamma \sqrt{ax - xx} + Ex^3 + Fxx + Gx$, soit la fluente de cette fluxion; si l'on prend la fluxion de cette fluente, en mettant au lieu de x son égal $\frac{ax - xx}{\sqrt{ax - xx}}$, & en posant les termes par ordre, on trouvera

$$\begin{array}{r} A \gamma \gamma x - 2 A \gamma xx + 2 A a \gamma x - 2 C a \gamma x - B xx + B ax + D ax \\ - 2 B \gamma xx + \frac{1}{2} B a \gamma x + \frac{1}{2} D a \gamma x + 3 E xx - D x + G x \\ - 2 C \gamma x \\ - D \gamma x \end{array} \quad \frac{1}{2} F x x.$$

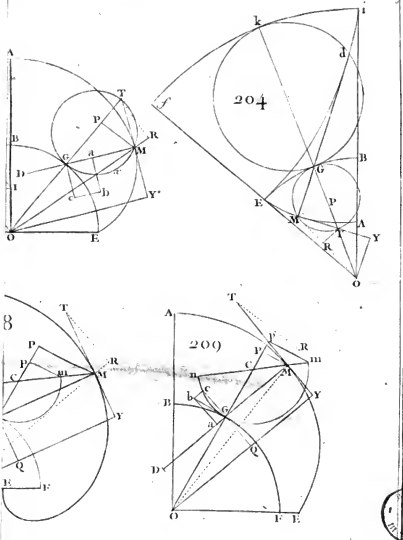
$$\sqrt{ax - xx}.$$

Si l'on fait à présent le coefficient du premier terme égal à celui de la fluxion proposée, & les autres des termes homologues égal à zero, on aura $A = \frac{c}{a}$, $A + B = 0$, $2 A a + \frac{1}{2} B a - 2 C - D = 0$, $2 C + \frac{1}{2} D = 0$, $3 E - B = 0$, $B a - D + 2 F = 0$, $D a + G = 0$. D'où l'on tire $A = \frac{c}{a}$, $-B = \frac{c}{a}$, $-C = \frac{c}{4}$, $D = c$, $-E = \frac{c}{3a}$, $F = c$, $-G = ac$; ces valeurs étant substituées donnent $\frac{c}{a} \gamma \gamma x - \frac{c}{a} \gamma x \sqrt{ax - xx} - \frac{c}{4} \gamma \gamma + c \gamma \sqrt{ax - xx} - \frac{c}{3a} x^3 + cxx - acx$, pour la fluente cherchée. Et lorsque $x = a$, γ sera $= \frac{1}{2} c$, & $\frac{3c^3}{16} - \frac{1}{4} ac$ sera la valeur cherchée du solide.

COROLLAIRE.

405. En divisant $\frac{1}{16} c^3 - \frac{1}{4} ac$ par le plan générateur, ou l'aire de la demi-roulette $\frac{3ac}{8}$, on aura $\frac{c^2}{16} - \frac{1}{2} a$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de la demi-roulette, & ainsi $\frac{1}{4} c - \frac{3aa}{2c}$ sera la distance de centre à l'axe AB, & $\frac{c}{4} +$

4aa





$\frac{441}{9c}$ fera la distance à la tangente E T. Et par conséquent la circonférence $\frac{cc}{3a} + \frac{3a}{9}$ du rayon $\frac{c}{4} + \frac{44a}{9c}$ étant multipliée par le plan générateur $\frac{3ac}{8}$, donnera $\frac{3c^3}{16} + \frac{aa^2c}{3}$ pour la valeur du solide décrit autour de la tangente E T.

R E M A R Q U E.

La maniere dont on a trouvé la fluente des fluxions $\frac{2cx^2}{\sqrt{ax}}, \frac{c}{a}$, 77^* , peut servir d'exemple pour d'autres cas semblables, où il y a des inconnues différentes dont on a seulement le rapport de leurs fluxions. Car on trouveroit à peu près de la même maniere la fluente de cette expression, si x exprimoit quelque espace hyperbolique; il faut seulement observer en général, 1°. que la fluxion du premier terme de la fluente supposée doit avoir un terme qui puisse être comparé avec la fluxion proposée: la fluxion du second terme doit avoir autant de termes qu'il soit possible comparables à ceux du premier, & le troisième autant qu'il soit possible qui soient comparables aux précédens, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé à quelque fluxion dont on puisse avoir la fluente. 2°. On doit avoir autant de termes dans la fluxion qu'il y en a dans la fluente supposée, afin qu'on puisse déterminer les coefficients A, B, C, &c.

Construction de la Cycloïde ordinaire.

Soit A B l'axe de la cycloïde, A M B le cercle générateur, *Fig. 110.* & soit divisée la demi-circonférence A M B en autant de parties égales que l'on pourra, & de ces points de divisions soient tirées des droites indéfinies perpendiculaires à A B: cela posé, si l'on porte autant de ces parties sur chacune des droites qu'elles sont distantes du point A, par exemple M N étant tirée par la septième division M, doit être de sept de ces parties, & ainsi des autres; par ce moyen on trouvera autant de points de la courbe que l'on voudra.

Comme il est fort aisé, par ce que nous avons dit ci-devant, de construire les autres cycloïdes, je ne m'arrêterai pas à les décrire.



T R A I T É

D E S

Q U A D R A T U R E S.

I N T R O D U C T I O N.

ENTRE toutes les figures géométriques, il n'y en a point qui ait tant de propriétés que le cercle, dont la raison est que sa circonférence rentrant en elle-même, on peut considérer cette ligne courbe comme faisant une infinité de révolutions autour d'elle-même, & par conséquent ses propriétés sont aussi infinies; car si l'on veut trouver le rapport entre les sinus de deux arcs qui sont dans une raison commensurable quelconque, l'équation qui en provient contient non seulement ce rapport, mais aussi ceux du sinus du plus grand arc aux sinus d'autant d'autres arcs, que le moindre arc est contenu dans le plus grand.

Monsieur le Marquis de l'Hôpital a donné plusieurs théorèmes à la fin de son *Traité des Sections coniques*, touchant les cordes des arcs qui sont en progression arithmétique, & Monsieur Cotes a trouvé des propriétés semblables à l'égard des lignes tirées d'un point quelconque pris en dedans ou en dehors du cercle, aux extrémités des arcs qui sont en progression arithmétique; & c'est sur ce fondement que son successeur le Docteur Smith a continué les *Tables des Fluents* de M. Cotes, dans son livre *De Harmonia Mensurarum*, publié en 1722.

Comme M. Cotes n'a point donné de démonstration de son théorème, ni le Docteur Smith, M. de Moivre eut la curiosité de la chercher; & l'ayant trouvée, il l'a publiée dans son excellent *Traité de Miscellanea Analytica*, imprimé en 1730. dans lequel non content de démontrer ce que les autres avoient fait,

il a encore beaucoup augmenté cette recherche ; car il a fait voir comment on peut réduire une fraction rationnelle quelconque en autant de fractions simples qu'il y a de diviseurs inégaux dans le dénominateur ; d'où il est aisé de trouver la fluente d'une fluxion fractionnaire quelconque commensurable , par le moyen de la mesure des angles & des lignes.

Or comme la démonstration du probleme pour réduire les fractions composées en d'autres plus simples , est fort long , s'étant servi des principes qu'il avoit déjà donnés auparavant dans son Traité sur les Jeux de hazard , j'ai cherché à en donner une qui soit plus simple , laquelle j'ai insérée à la fin de mon Traité de Mathématique dans l'édition Angloise.

Mais , parce que M. de Moivre a monté comme par degrés des fluxions simples aux fluxions plus composées , il étoit à désirer qu'on eut une théorie plus générale , ce qui après ce que M. de Moivre avoit dit , paroissoit plus facile qu'il ne l'étoit en effet. Cependant M. Klinkenstiern , Professeur à Upsal , en donna une dans les Transactions Philosophiques de la Société Royale de Londres , d'une fluxion fractionnaire dont le dénominateur est un trinome rationnel , sans en donner la démonstration , c'est ce qui m'a engagé à la chercher ; mais comme cela ne se pouvoit faire sans trouver premièrement la construction générale d'une fraction dont le dénominateur est un binome , j'ai été obligé de m'étendre plus loin que je n'avois d'abord cru : voilà ce qui a donné lieu au Traité suivant , dans lequel on trouvera que les tables des fluentes de M. Cotes ne sont que des cas particuliers de mes formules générales : j'aurois pu pousser cette recherche beaucoup plus loin , mais j'ai cru qu'il valoit mieux m'en tenir à ce que j'ai donné , parce que la spéculation poussée trop loin , ennuie souvent le lecteur sans l'instruire.

Dans le tems que je travaillois à la démonstration du probleme de M. Klinkenstiern , j'invitai M. Thomas Simpson à la même recherche ; mais quoiqu'il ne pût réussir , comme il l'a avoué devant des témoins , & que je lui aye fait voir ma démonstration , il l'a faite imprimer dans son essai sur plusieurs sujets de Mathématiques en 1740 , sans faire la moindre mention de moi , ce qui n'étoit certainement pas trop honnête , mais c'est sa manière d'en user envers ceux qu'il copie.

P R O B L È M E I.

Fig. 1,

1. Trouver le rapport entre les cosinus x, u , de deux arcs quelconques a, na , qui sont entr'eux comme l'unité est à n .

En nommant le rayon r , la fluxion de l'arc a sera exprimée par $\frac{r \dot{a}}{\sqrt{rr-xx}}$, & celle de l'arc na , par $\frac{r \dot{n} \dot{a}}{\sqrt{rr-uu}}$, on aura par conséquent cette proportion $1 : n :: \frac{r \dot{a}}{\sqrt{rr-xx}} : \frac{r \dot{n} \dot{a}}{\sqrt{rr-uu}}$, & en faisant le produit des extrêmes égal à celui du moyen, $\frac{r \dot{a}}{\sqrt{rr-xx}} = \frac{n \dot{a}}{\sqrt{rr-uu}}$. Or si l'on multiplie les dénominateurs par $\sqrt{-1}$, il viendra $\frac{r \dot{a}}{\sqrt{xx-rr}} = \frac{n \dot{a}}{\sqrt{uu-rr}}$, dont les fluentes par les logarithmes seront $\frac{x + \sqrt{xx-rr}}{r} = \frac{u + \sqrt{uu-rr}}{r}$.

Il faut remarquer que, quoique les quantités sous les signes radicaux soient impossibles, les conclusions que l'on en tire sont néanmoins vraies, comme l'on verra ci-après.

C O R O L L A I R E I.

2. Il est évident que les quantités $x, \sqrt{xx-rr}, u, \sqrt{uu-rr}$, peuvent être positives, ou négatives; lorsqu'elles sont négatives, leurs fluxions auront le même signe; par conséquent si l'on tire les diamètres Aa, Kk , l'un perpendiculaire à l'autre, en considérant les cosinus des arcs terminés dans la demi-circonférence KAk , comme positifs; ceux des arcs terminés dans la demi-circonférence Kak , seront négatifs; les sinus des arcs terminés dans AKa , seront positifs, & ceux des arcs terminés dans akA , négatifs: les exemples suivans éclairciront ce sujet.

I. Soit l'arc AB de 60 degrés, & $n = x, u$ exprimera le cosinus de l'arc AC , de 120 degrés, & ainsi $x = \frac{1}{2}r, u = -\frac{1}{2}r$: donc l'équation générale deviendra $\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4}}$.

II. Si l'arc AB est de 60 degrés, & $n = 4, u$ sera le cosinus d'un arc de 4×60 , ou 240 degrés; ainsi $x = \frac{1}{2}r, u = -\frac{1}{2}r$:

donc l'équation générale deviendra $\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$.

III. Mais si l'arc AB est de 45 degrés, & $n = 7$, u sera le cosinus de l'arc 315, ou de 45 degrés, ainsi $x = u = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, & l'équation générale deviendra dans ce cas $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{-\frac{1}{2}}$.

On doit remarquer que les quantités $\sqrt{xx-rr}$, $\sqrt{uu-rr}$, ont toujours les mêmes signes que les sinus des arcs dont x & u sont les cosinus.

COROLLAIRE II.

3. Si l'on nomme la circonférence entière c , & l'arc AM $= a$, en prenant l'arc AB $= \frac{a}{n}$, à cause que $n : 1 :: a : \frac{a}{n} :: c : \frac{c}{n}$, $a : \frac{c+a}{n} :: 2c+a : \frac{2c+a}{n} :: 3c+a : \frac{3c+a}{n}$, &c. lorsque n est un nombre entier, il est manifeste que les arcs a , $c+a$, $2c+a$, $3c+a$, ont tous le même cosinus x , & par conséquent l'équation $\frac{x + \sqrt{xx-rr}}{r} = \frac{u + \sqrt{uu-rr}}{r}$, exprime non seulement la relation entre les cosinus des arcs AB, AM, mais aussi les relations entre le cosinus de l'arc AM (u), & des arcs $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, $\frac{3c+a}{n}$, &c. continués jusqu'au nombre n .

N. B. La raison de ce que l'équation ci-dessus exprime les relations entre le cosinus u , & ceux des arcs $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, &c. est seulement, que les divisions, après n nombre de fois, tombent dans les mêmes points des premières divisions.

COROLLAIRE III.

4. Si la circonférence est divisée en n parties égales, commençant en B, telles que BC, CD, DE, EF, &c. on aura AB $= \frac{a}{n}$, AC $= \frac{c+a}{n}$, AD $= \frac{2c+a}{n}$, AE $= \frac{3c+a}{n}$, &c. C'est pourquoi l'équation $\frac{x + \sqrt{xx-rr}}{r} = \frac{u + \sqrt{uu-rr}}{r}$, exprime

les relations entre le cosinus u de l'arc AM , & ceux des arcs AB , AC , AD , AE , &c.

C O R O L L A I R E I V.

5. Si l'on suppose $z = x + \sqrt{xx - rr}$, on aura $z - x = \sqrt{xx - rr}$, dont le carré est $zz - 2zx + xx = xx - rr$; en effaçant xx de part & d'autre, & réduisant l'équation égale à zéro, il viendra $zz - 2xz + rr = 0$.

Or comme $z = x + \sqrt{xx - rr}$, élevée à la puissance n , donne $z^n = x + \sqrt{xx - rr}$; cette valeur, étant substituée

* Art. 1.

dans l'équation générale, * donnera $\frac{z^n}{z} = \frac{x + \sqrt{xx - rr}}{z}$, ou bien en faisant évanouir les fractions $z^n - uz^{n-1} = r^{n-1} \times \sqrt{uu - rr}$, dont le carré est $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + uu r^{2n-2} = uu r^{2n-2} - r^{2n}$; en retranchant $uu r^{2n-2}$ de part & d'autre, & réduisant l'équation égale à zéro, il viendra enfin $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$.

Par le moyen de ces deux équations $zz - 2xz + rr = 0$, $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, on trouvera toujours l'équation qui détermine la relation demandée.

C O R O L L A I R E V.

6. En transposant le second terme de l'équation $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, on aura $z^{2n} + r^{2n} = 2uz^n r^{n-1}$, dont le carré est $z^{4n} + 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = 4uu z^{2n} r^{2n-2}$; & si l'on nomme le sinus de l'arc AM , s , on aura $uu = rr - ss$, par la nature du cercle; en mettant cette valeur de uu , dans la dernière équation elle deviendra $z^{4n} + 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = 4z^{2n} r^{2n-2} (rr - ss)$, ou $z^{4n} - 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = -4ss z^{2n} r^{2n-2}$, dont la racine carrée donnera $z^{2n} - r^{2n} = 2s z^n r^{n-1} \sqrt{-1}$.

C O R O L L A I R E VI.

* Art. 5.

7. Puisque * $z = x + \sqrt{xx - rr}$, il est évident, par la nature des équations, que $z - x = \sqrt{xx - rr}$, est un diviseur de l'équation A. $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, aussi bien que de l'équation B. $zz - 2xz + rr = 0$; & l'autre racine

$z - x + \sqrt{xx - rr}$ de l'équation B, sera par conséquent aussi un diviseur de l'équation A; par la même raison l'équation B, sera elle-même un diviseur de l'équation A.

COROLLAIRE VII.

8. Il est évident, que si x exprime le cosinus de l'un ou l'autre de ces arcs AB, AC, AD, AE, &c. on aura toujours l'équation $\frac{x + \sqrt{xx - rr}}{r} = \frac{n + \sqrt{nn - rr}}{r}$; & par conséquent l'équation B, sera toujours un diviseur de l'équation A, dans tous les cas possibles.

Par exemple, soit l'arc AB de 60 degrés, & $n = 2$, on aura l'arc AM, de 120 degrés, & ainsi $x = \frac{1}{2}r$, $u = -\frac{1}{2}r$; & les équations A, B, deviendront $z^4 + rrz^2 + r^2 = 0$, $zz - rz + rr = 0$; la première étant divisée par la dernière, donnera $zz + rz + rr = 0$, pour quotient sans reste.

Si l'arc AB, est de 60 degrés, & $n = 3$, on aura AM = 180 degrés, AC = 180, & AD = 300; de là $u = -r$, $x = \frac{1}{2}r$, le cosinus de l'arc AC sera $-r$, & celui de l'arc AD, $\frac{1}{2}r$. Par conséquent l'équation A, deviendra $z^6 + 2z^3r^3 + r^6 = 0$, & en mettant les trois différentes valeurs $\frac{1}{2}r$, $-r$, $\frac{1}{2}r$, de x dans l'équation B, on aura $zz - rz + rr = 0$, $zz + 2rz + rr = 0$, $zz - rz + rr = 0$, pour les trois diviseurs de l'équation $z^6 + 2z^3r^3 + r^6 = 0$.

COROLLAIRE VIII.

De là il est manifeste que la valeur de z n'est d'aucune conséquence dans les diviseurs qui proviennent de l'équation $zz - 2xz + rr = 0$, en substituant les différentes valeurs de x . Car pourvu que ces valeurs de x , soient les cosinus des arcs ci-dessus mentionnés, les équations qui en proviennent seront toujours les diviseurs de l'équation $z^{2n} - 2xz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$; & par conséquent, si a, b, c, d , &c. expriment ces cosinus, & que $zz - 2az + rr = A$, $zz - 2bz + rr = B$, $zz - 2cz + rr = C$, $zz - 2dz + rr = D$, on aura toujours $z^{2n} - 2xz^n r^{n-1} + r^{2n} = A \times B \times C \times D$, &c.

Si le sinus de l'arc A B est y , celui de l'arc A M, s , on aura $-yy = xx - rr$, & $-ss = uu - rr$, par la nature du cercle, en extrayant la racine quarrée, il viendra $y \sqrt{-1} = \sqrt{xx - rr}$, & $s \sqrt{-1} = \sqrt{uu - rr}$; ces valeurs étant substituées dans l'équation $\frac{x + \sqrt{xx - rr}}{r} = \frac{u + \sqrt{uu - rr}}{r}$, elle sera

changée en celle-ci $x + y \sqrt{-1} = ur^{n-1} + s r^{n-1} \sqrt{-1}$. Or comme les quantités impossibles dans un membre d'une équation quelconque, sont toujours égaux aux quantités impossibles dans l'autre membre, puisqu'il ne sçauroit y avoir autrement d'égalité; il est constant que les termes impairs de $x + y \sqrt{-1}$, élevé à la puissance n , sont égaux à $\pm ur^{n-1}$, & les termes pairs à $\pm s r^{n-1} \sqrt{-1}$: Donc

$$\begin{aligned} \pm ur^{n-1} &= x^n - \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} A \frac{xx}{xx} + \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} B \frac{xx}{xx} - \frac{n-4}{5} \\ &\quad \times \frac{n-5}{6} C \frac{xx}{xx} + \&c. \\ \pm s r^{n-1} &= ny x^{n-1} - \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{3} A \frac{xx}{xx} + \frac{n-3}{4} \times \frac{n-5}{5} B \frac{xx}{xx} \\ &\quad - \frac{n-5}{6} \times \frac{n-7}{7} C \frac{xx}{xx} + \&c. \end{aligned}$$

Les lettres A, B, C, &c. expriment chacune le terme qui les précède, & les signes de s & u , seront déterminés par ce qui a été dit dans le corol. 2.

Par exemple, si l'on veut avoir le sinus s & le cosinus u , d'un arc triple de l'arc dont le sinus est y , & le cosinus x , on aura $n = 3$, & ainsi $\pm urr = x^3 - 3xyy$, & $\pm srr = 3xyy$, $-y^3$.

L E M M E.

Fig. 22

10. Soit pris le point P dans le rayon A O, prolongé s'il est nécessaire de manière que $OP = z$, & soit tiré la ligne PB; à l'extrémité de l'arc A B, dont le cosinus est x , & que $\overline{PB} = zz \mp 2xz + rr$; le second terme $2xz$ est négatif, lorsque le cosinus x tombe sur le rayon A O, & positif lorsque il tombe sur O B.

Car

Car si l'on tire BQ perpendiculaire à AO, on aura $QO = x$, $QB = y$, & $PQ = x \mp z$; de là $QB^2 = yy = rr - xx$, $PQ^2 = xx \mp 2xz + zz$; & par conséquent la somme des quarrés QB^2, PQ^2 , est égale au quarré de $PB^2 = zz \mp 2xz + rr$.

COROLLAIRE I.

11. De là il suit, que si l'arc AB est à l'arc AM, dans la raison de l'unité à un nombre entier quelconque n , que la circonférence soit divisée en n parties égales, commençant au point B, comme BC, CD, DE, &c. & que l'on tire des lignes du point P aux points C, D, E, &c. on aura $z^n - 2uz^{n-1} + r^n = PB \times PC \times PD \times PE \times \&c.$. Car si a, b, c, d , &c. expriment les cosinus des arcs AB, AC, AD, AE, &c. on aura $PB^2 = zz - 2az + rr$, $PC^2 = zz - 2bz + rr$, $PD^2 = zz - 2cz + rr$, $PE^2 = zz - 2dz + rr$: Donc * &c. * An. 2.

Si par exemple l'arc AM est de 180 degrés, & $n = 4$, on aura $AB = 45$, $AC = 135$, $AD = 225$, $AE = 315$; & ainsi $u = -r$, $a = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $b = -\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $c = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $d = -\frac{1}{2}r\sqrt{2}$; par conséquent $PB^2 = PE^2 = zz - rz\sqrt{2} + rr$, $PC^2 = PD^2 = zz + rz\sqrt{2} + rr$; & par conséquent $PB \times PC \times PD \times PE = \overline{zz - rz\sqrt{2} + rr \times zz + rz\sqrt{2} + rr} = z^4 + 2z^2r^2 + r^4$.

COROLLAIRE II.

12. Si l'arc AM = 0, on aura $u = +r$, & les arcs * Fig. 5.
* An. 3. $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{n\pi}{n}$, &c. deviendront $\frac{r}{n}, \frac{r}{n}, \frac{r}{n}, \frac{r}{n}, \dots, \frac{r}{n}$, ou c ; & ainsi en divisant la circonférence en n parties égales, AB, BC, CD, DE, &c. on aura $AB = \frac{r}{n}$, $AC = \frac{r}{n}$, $AD = \frac{r}{n}$, $AE = \frac{r}{n}$, &c. par conséquent l'expression du corollaire précédent deviendra ici $PA \times PB \times PC \times PD \times PE^2 = z^n - 2z^n r^n + r^{2n}$, ou bien $PA \times PB \times PC \times PD \times PE = \pm z^n \mp r^n$.

C O R O L L A I R E I I I.

Fig. 41

13. Si l'arc $AM = \frac{1}{2}c$, on aura $u = -r$, & les arcs $\frac{c}{n}$, $\frac{c+\frac{1}{2}c}{n}$, $\frac{1c+\frac{1}{2}c}{n}$, $\frac{3c+\frac{1}{2}c}{n}$, deviendront $\frac{c}{2n}$, $\frac{3c}{2n}$, $\frac{5c}{2n}$, $\frac{7c}{2n}$, &c. C'est pourquoy, en divisant la circonférence en $2n$ parties égales AB, BC, CD, DE , &c. on aura $AB = \frac{c}{2n}$, $AD = \frac{3c}{2n}$, $AF = \frac{5c}{2n}$, $AH = \frac{7c}{2n}$, &c. Par conséquent $\overline{PB} \times \overline{PD} \times \overline{PF} \times \overline{PH} = \zeta^{1n} + 2\zeta^n r^n + r^{2n}$, ou bien $\overline{PB} \times \overline{PD} \times \overline{PF} \times \overline{PH} = \zeta^n + r^n$.

C O R O L L A I R E I V.

14. Puisqu'il y a autant de points de division, au-dessus & au-dessous du diamètre AG , qui sont à des distances égales du point A .

Que le nombre n soit pair ou impair, il s'ensuit que $PB = PM$, $PD = PK$, $PF = PH$, &c. & $PC = PL$, $PE = PI$, &c. & par conséquent $\overline{PA} \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2$ &c. $= \pm \zeta^n \mp r^n$, & $\overline{PB}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PF}^2$ &c. $= \zeta^n + r^n$.

C O R O L L A I R E V.

Fig. 42

15. De là il suit, que si la demi-circonférence est divisée en n parties égales aux points B, C, D, E, F, G , on aura $\overline{PA} \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2 \times \overline{PG} = \pm \zeta^n \mp r^n$, & $\overline{PB} \times \overline{PD} \times \overline{PF}^2 = \zeta^n + r^n$.

Si par exemple, AB est de 30 degrés, $n = 6$, on aura $AD = 90$, $AF = 150$, & les cosinus de ces arcs seront $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$, 0, $-\frac{1}{2}r\sqrt{3}$, respectivement. Ainsi $\overline{PD} \times \overline{PB} \times \overline{PF}^2 = \zeta\zeta - r\zeta\sqrt{3} + rr \times \zeta\zeta + rr \times \zeta\zeta + r\zeta\sqrt{3} + rr = \zeta^6 + r^6$. Et les cosinus des arcs AC (60), AE (120) seront $\frac{1}{2}r$, $-\frac{1}{2}r$; par conséquent $\overline{PA} \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2 \times \overline{PG} = r - \zeta \times \zeta\zeta - r\zeta + rr \times \zeta\zeta + r\zeta + rr \times \zeta + r = r^2 - \zeta^6$.

PROBLEME II.

16. Supposant la méthode de trouver les diviseurs d'une équation, il s'agit de réduire une fraction quelconque en autant de fractions simples que le dénominateur a des diviseurs inégaux.

Soit $\frac{a+bx+cx^2}{l+mx+nx^2+x^3}$, la fraction proposée, & que $z-g$ soit un des diviseurs, $e+fz+zz$, le quotient; ou ce qui est la même chose, supposons que $\frac{a+bx+cx^2}{l+mx+nx^2+x^3} = \frac{r+sz}{e+fz+zz} + \frac{t}{z-g}$; en réduisant ces fractions sous la même dénomination, & égalant les numérateurs, on aura $a+bx+cx^2 = et+ftz+zzz + r(e+fz+zz) + s(e+fz+zz)(z-g)$

+ $r(e+fz+zz) + s(e+fz+zz)(z-g)$ est élevé à la même puissance égaux, on aura $a=et-gr$, $b=ft+r-sg$, $c=t+s$. Si l'on met $c=t$, au lieu de son égal s dans $b=ft+r-sg$, il viendra $b=ft+r-cg$, $+gt$, ou en transposant, $r=b+cg-ft-gt$; cette valeur de r étant substituée dans $a=et-gr$, donne $a=et+fgt+ggt-bg-cgg$, d'où l'on tire $t = \frac{a+bg+cgz}{e+fg+gz}$, pour la valeur du numérateur de la fraction simple $\frac{t}{z-g}$.

Si le diviseur est $g-z$, au lieu de $z-g$, la valeur du numérateur t , sera de même; mais si ce diviseur est $z+g$, on aura $t = \frac{a-bz+cgz}{e-fg+gz}$.

Or puisque tout ce que nous venons de dire à l'égard d'un diviseur peut également s'appliquer à tout autre diviseur, il est évident que les simples fractions demandées peuvent être trouvées.

COROLLAIRE.

17. De là il suit, qu'en prenant la fluxion du dénominateur $l+mz+nzz+z^3$, ou de son égal $e+fz+zz \times z-g$, on aura $fz+zz \times z-g+zz \times e+fz+zz$, laquelle étant divisée par z , donne $-fg+fz-2gz+2zz+e+fz+zz$, ou $e-fg+2fz-2gz+3zz$, & mettant au lieu de

Kk ij

z sa valeur, c'est-à-dire $+g$, lorsqu'il y a $z - g$, ou $-g$, si $g + z$, dans cette dernière expression, elle deviendra $e + fg + gg$, & en mettant la même valeur de z , dans le numérateur $a + bz + cz^2$, il devient $a + bg + cg^2$, cette dernière expression divisée par la précédente, donnera $\frac{a+bg+cg^2}{e+fg+gg}$, ce qui est évidemment égal au numérateur e de la fraction simple $\frac{e}{z-g}$. Ce qui donne cette

R È G L E G É N É R A L E.

Pour trouver les numérateurs des fractions simplées.

Au lieu de z mettez sa valeur dans le numérateur, & vous aurez le numérateur; & en mettant la même valeur dans la fluxion du dénominateur, vous aurez le dénominateur d'une fraction égale au numérateur de la fraction simple.

Si le diviseur est $g - z$, il faudra changer les signes dans la valeur de e , puisque $\frac{e}{g-z} = \frac{-e}{z-g}$.

Par exemple, soit $\frac{1}{xz - az}$, la fraction proposée, dont les diviseurs sont $z - a$, $z + a$, en supposant $\frac{1}{xz - az} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z+a}$; si la fluxion $2z \dot{z}$ est divisée par z , & que l'on mette $+a$, $-a$, au lieu de z , nous aurons $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$; par conséquent $\frac{1}{xz - az} = \frac{1}{2a} \times \text{par } \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}$.

Soit $\frac{xz}{x^2 - axz + az^2 - a^2}$, la fraction proposée; les diviseurs du dénominateur sont $z - a$, $z - a\sqrt{-1}$, $z + a\sqrt{-1}$, & si $\frac{xz}{x^2 - axz + az^2 - a^2} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-a\sqrt{-1}} + \frac{C}{z+a\sqrt{-1}}$, en divisant la fluxion du dénominateur $3z^2 \dot{z} - 2a\dot{z}z + a\dot{z}z$ par z , & mettant a , $a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, au lieu de z , dans $3zz - 2az + az$, & dans le numérateur $z\dot{z}$, il viendra $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2-2\sqrt{-1}}$, $C = \frac{1}{2+2\sqrt{-1}}$; par conséquent $\frac{xz}{x^2 - axz + az^2 - a^2}$

est égale à $\frac{1}{2} \times \text{par } \frac{1}{z-a} + \frac{1}{2-2\sqrt{-1}} \frac{1}{z-a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2+2\sqrt{-1}} \frac{1}{z+a\sqrt{-1}}$.

L'on peut remarquer que s'il y a des diviseurs simples qui

renferment des quantités impossibles, en en ajoutant deux ensemble, les quantités impossibles s'évanouiront, comme dans ces derniers.

Si l'on ajoute la seconde & la troisième fraction ensemble, on aura $\frac{z+a}{xz+a}$, pour leur somme : donc $\frac{zx}{z-a \times xz + a \times z - a^2} = \frac{1}{z} \times$
par $\frac{1}{z-a} + \frac{z+a}{xz+a}$.

La méthode de trouver les diviseurs d'une expression, est la même que celle de trouver les racines de cette expression, en la supposant égale à zéro ; car les racines de $z^3 - z^2 = 0$, sont de même que les diviseurs de $z^3 - z^2$.

REMARQUE.

Nous avons supposé dans le dernier problème que les diviseurs de la fraction composée sont inégaux, parce que quand il y en a d'égaux, leurs numérateurs deviennent infinis. Or pour rendre le problème général, il faut ajouter toutes les fractions qui sont égales ensemble, & alors leur somme deviendra finie ; d'où l'on voit qu'on ne peut réduire une fraction composée qu'en autant de fractions simples qu'il y a de diviseurs inégaux.

Par exemple, pour réduire la fraction composée $\frac{1}{z-a \times xz + b \times xz + a}$ en fractions simples, parce qu'il n'y a que les deux diviseurs $z-a$, $z+a$ inégaux. Or en supposant que $\frac{1}{z-a \times xz + b \times xz + a} =$ ex-
prime cette fraction, c'est-à-dire $b=a$, & si $\frac{1}{z-a \times xz + b \times xz + a} =$
 $\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z+a}$; mais la fluxion du dénominateur divisée par z , donne $3zz - 2bz - aa$, & en substituant a, b , & $-a$, au lieu de z , on aura $A = \frac{1}{2aa - 2ab}$, $B = \frac{1}{bb - aa}$, $C =$
 $\frac{1}{2aa - 2ab}$: Donc $\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{1}{2aa - 2ab \times z - a^2} + \frac{1}{bb - aa \times z - b^2}$;
& en ajoutant ces deux fractions ensemble, on aura

$\frac{b^2 - a^2 \times 2a + b - a}{b - a \times 2a \times b + a \times z - a \times z - b}$, pour la somme de ces deux fractions, laquelle étant divisée par $b-a$, & b fait $= a$, deviendra $\frac{1}{4aa}$;
 $\times \frac{3a-z}{z-a}$; & par conséquent $\frac{1}{z-a \times xz + a} = \frac{1}{4aa} \times$ par $\frac{3a-z}{z-a} + \frac{1}{z-a}$.

$\frac{1}{z+a}$; ce qui fait voir que la méthode de trouver des fractions simples est générale pour tous les cas , avec la restriction qu'on vient de décrire.

L E M M E I I.

Fig. 6.

18. Soit PM, QN , les sinus, & CP, CQ les cosinus de deux arcs quelconques AM, AN ; & GM le sinus, CG le cosinus de leurs différences MN ; je dis que $CA \times CG = CQ \times CP + QN \times PM$, & $CA \times GM = CQ \times PM - CP \times QN$.

Si MG prolongée rencontre le rayon CA en H , & PM coupe le rayon CN en F ; en nommant $CQ = u$, $QN = z$, $CP = x$, $PM = y$; les triangles semblables CPF, CQN , donneront $CQ(u) : QN(z) :: CP(x) : PF = \frac{xz}{u}$; ainsi $FM = y - \frac{xz}{u}$, & $CN : CQ :: FM : GM$, ou $CA \times GM = uy - xz$.

Et les triangles semblables CQN, MPH, CGH , donnent $CQ(u) : QN(z) :: PM(y) : PH = \frac{yz}{u}$; donc $CH = x + \frac{yz}{u}$; & par conséquent $CN : CQ :: CH : CG$, ou $CA \times CG = xu + yz$.

C O R O L L A I R E.

19. De là il suit, qu'en comparant les valeurs de PM, y , dans les deux équations aussi-bien que ceux de x , on trouvera que $CA \times CP = CG \times CQ - QN \times GM$, & $CA \times PM = CG \times QN + CQ \times GM$, parce que $\overline{AC} = yy + xx$.

L E M M E I I I.

20. La même chose étant supposée que dans le cinquième article ; si m, p , expriment les racines de l'équation $z z - 2 x z + r r = 0$; je dis que $2 u r^{n-1} = m^n + p^n$, & $2 s r^{n-1} \sqrt{-1} = p^n - m^n$.

Car puisque l'équation $z z - 2 x z + r r = 0$, est un diviseur de l'équation $z^{2n} - 2 u z^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, la racine m de la première en est aussi une de la dernière ; ainsi en mettant m au lieu de z , on aura $m^{2n} - 2 u m^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$.

Or comme $m - z \times p - z = mp - mz - pz + zz = rr - 2xz + zz$, il faut que $m + p = 2x$, & $mp = rr$; en élevant cette dernière égalité à la puissance n , on aura $m^n p^n = r^n$; cette valeur de r^n , étant mise dans l'équation ci-dessus, donnera $m^n - 2u m^n r^{n-1} + m^n p^n = 0$, & divisant par m^n , $m^n - 2u r^{n-1} + p^n = 0$, ou $2u r^{n-1} = m^n + p^n$. On trouvera de la même manière que $2s r^{n-1} \sqrt{-1} = p^n - m^n$.

PROBLEME III.

21. Réduire la fraction $\frac{z^{n-1}}{r^n - z^n}$ dans des fractions simples, en supposant θ un nombre entier positif quelconque & moindre que n .

Soit m, p, q, z , &c. les racines de $r^n - z^n = 0$: si A, B, C, D , &c. expriment les numérateurs des fractions simples, on aura $\frac{z^{n-1}}{r^n - z^n} = \frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} + \frac{C}{q-z} + \frac{D}{z-z} + \&c.$ continué à n fractions. Or comme $* A = \frac{m^{n-1}}{n m^{n-1}} = \frac{m^1}{n m^0}$; & si l'on met m^1 *Art. 17* au lieu de z , dans $r^n - z^n = 0$, on aura $r^n = m^n$; & par conséquent $A = \frac{m^1}{n m^0}$, deviendra $A = \frac{m^1}{n r^0}$; & par la même raison, $B = \frac{p^1}{n r^0}$, $C = \frac{q^1}{n r^0}$, $D = \frac{z^1}{n r^0}$. Par conséquent les racines m, p, q, z , étant données, les fractions simples seront déterminées.

COROLLAIRE I.

22. En ajoutant les deux premières fractions ensemble, on aura $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{Ap+Bm-Az-Bz}{m^2-p^2}$; or comme $A = \frac{m^1}{n r^0}$, & $B = \frac{p^1}{n r^0}$, on aura $Ap = \frac{m p^1}{n r^0}$, $Bm = \frac{m p^1}{n r^0}$, & $Ap + Bm = \frac{p m^1 + m p^1}{n r^0}$, ou bien en divisant le numérateur par pm , & le multipliant par son $*$ égal rr , il viendra $Ap + Bm = \frac{r r}{n r^0} \times$ *Art. 20* $\frac{m^{n-1} + p^{n-1}}{m^{n-1} + p^{n-1}}$, on a aussi $A + B = \frac{1}{n r^0} \times m + p^1$.

Si présentement l'on divise la demi-circonférence décrite *Fig. 21* avec le rayon r , en n parties égales aux points B, C, D, E , &c. & l'arc ACc est à l'arc AC , comme θ est à l'unité, & l'on nomme a le sinus, & x le cosinus de l'arc ACc , & le sinus de

leur différence Cc, y ; on aura $2x r^{i-1} = m^i + p^i$, & comme l'arc AC est à l'arc Cc , comme l'unité est à $\theta - 1$; on aura par la même raison $2y r^{i-1} = m^{i-1} + p^{i-1}$; par conséquent ces valeurs étant substituées dans les égalités ci-dessus, donneront $Ap + Bm = \frac{2yr^i}{nr^i}$, $A + B = \frac{2xr^{i-1}}{nr^i}$: donc $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \frac{ry - xz}{rr - 2xz + z^2}$, parce que $m - z \times p - z = rr - 2xz + z^2$.

En faisant $z - x = v$, en quarrant on aura $xx - 2xz + zz = vv$, ou $-2xz + zz = vv - xx$, & en ajoutant rr de part & d'autre, il viendra $rr - 2xz + zz = vv - xx + rr$. Si a exprime le sinus dont x est le cosinus, on aura $rr - xx = aa$; par conséquent $rr - 2xz + zz = aa + vv$.

Puisque $z - x = v$, donc $z = x + v$, & $xz = xx + xv$, on aura aussi $ry + xz = ry - xx - xv$, ou à cause que $*ry = aa + xx$, il viendra $ry - xz = aa - xv$; par conséquent $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \frac{aa - xv}{aa + vv}$.

C O R O L L A I R E I I.

23. De là il suit qu'il est manifeste que si les arcs ACc , $A E c$, $A G g$, &c. sont aux arcs AC , AE , AG , &c. comme θ est à l'unité; en nommant les sinus des derniers arcs a, b, c, d , &c. ceux des premiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. leurs cosinus x, λ, μ, π , &c. on aura $\frac{x^{i-1}}{r^{i-1} - z^i} = \frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \text{par } \frac{aa - xv}{aa + vv} + \frac{bb - yv}{bb + vv} + \frac{cc - \mu v}{cc + vv} + \frac{dd - \pi v}{dd + vv} + \&c.$

Il faut remarquer que lorsque n est un nombre impair $r - z$ sera un des diviseurs du binome $r^n - z^n$, & ainsi $\frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \frac{z^i}{r - z}$ sera la première fraction simple; & lorsque n est un nombre pair $r - z$, & $r + z$ seront deux diviseurs, & par conséquent $\frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \frac{z^i}{r - z}$ sera la première fraction, & $\frac{2r^{i-1}}{nr^i} \times \frac{z^i}{r + z}$ la dernière.

P R O B L E M E I V.

24. Réduire la fraction $\frac{r^n - z^n}{r^n + z^n}$ en des fractions simples, θ étant un nombre entier & positif quelconque moindre que n .

Comme

Comme cette fraction ne diffère de la précédente que par le signe $+$ au lieu de $-$; il est clair que les simples fractions se trouveront de même. Donc si la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, est divisée en n parties égales aux points B, C, D, E , &c. & si l'on prend les arcs ABb, ADd, AFF , &c. qui soient aux arcs des divisions impairs AB, AD, AF , &c. comme θ est à l'unité : en nommant les sinus des derniers arcs a, b, c, d ; ceux des premiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. & leur cosinus, x, λ, μ, π , &c. on aura comme ci-devant

$$\frac{r'-1}{r'+1} = \frac{r'-1}{nr^2} \times \text{par} \frac{a\alpha - \alpha\alpha}{a\alpha + \alpha\alpha} + \frac{b\beta - \lambda\lambda}{b\beta + \lambda\lambda} + \frac{c\gamma - \mu\mu}{c\gamma + \mu\mu} + \frac{d\delta - \pi\pi}{d\delta + \pi\pi} + \text{&c.}$$

Si n est un nombre impair, $\frac{r'-1}{nr^2} \times \frac{\frac{1}{2}r}{r+1}$ fera la première fraction.

COROLLAIRE.

25. Si les racines étoient $m+z, p+z$, au lieu de $m-z, p-z$, ou ce qui est la même chose, si l'équation est $z^2 + 2xz + rr = 0$, le second terme xv de la fraction $\frac{a\alpha - \alpha\alpha}{a\alpha + \alpha\alpha}$, sera positif; c'est pourquoi, tous les termes multipliés par les cosinus qui tombent sur le rayon AO seront négatifs, & au contraire; & tous les termes multipliés par les sinus des arcs au-dessus du diamètre seront positifs & au contraire.

Par exemple, si $n=7, \theta=5$, on aura $\alpha=c2, \beta=e4, \gamma=g6, x=02, \lambda=04, -\mu=06$, & $\frac{x^2}{r'+1} = \frac{\frac{1}{2}r}{r+1}$
 $\times \text{par} \frac{-a\alpha + \alpha\alpha}{a\alpha + \alpha\alpha} + \frac{b\beta + \lambda\lambda}{b\beta + \lambda\lambda} + \frac{c\gamma + \mu\mu}{c\gamma + \mu\mu} - \frac{\frac{1}{2}r}{r+1}$, ou bien $\alpha=b1, \beta=d3, \gamma=-f5, x=01, -\lambda=03, -\mu=05$;
 & par conséquent $\frac{x^2}{r'+1} = \frac{\frac{1}{2}r}{r+1} \times \text{par} \frac{a\alpha + \alpha\alpha}{a\alpha + \alpha\alpha} + \frac{b\beta - \lambda\lambda}{b\beta + \lambda\lambda} - \frac{c\gamma + \mu\mu}{c\gamma + \mu\mu} + \frac{\frac{1}{2}r}{r+1}$.

PROBLEME V.

26. Réduire la fraction $\frac{x^2 + r^2 - 1}{x^2 + 1 + n x^2 r^2 - 1 + r^2}$ en des fractions simples, lorsque le dénominateur ne peut être réduit en deux binômes, & que θ est moindre que n .

Soient m, p, q, t , &c. les diviseurs, on aura $\frac{A}{m-x} + \frac{B}{p-x}$
 LI

* Art. 17.
$$= \frac{Ap + Bm - Ax - Bx}{mp - mx - pz + zx}, \& * A = \frac{m^2 + n^2}{2n(m^2 - u r^{n-1})}, \text{ ou en divisant}$$

* Art. 20. par m^n , $A = \frac{m^2}{2n(m^2 - u r^{n-1})}$; or comme $* 2 u r^{n-1} = m^n + p^n$,

en mettant la valeur de $u r^{n-1}$, il viendra $A = \frac{m^2}{n(m^2 - p^n)}$, ou à

* Art. 20. cause que $* 2 s r^{n-1} \sqrt{-1} = m^n - p^n$, on aura enfin $A = \frac{m^2}{2 n s r^{n-1} \sqrt{-1}}$; & par la même raison $B = \frac{p^2}{2 n s r^{n-1} \sqrt{-1}}$. Ainsi

$$A + B = \frac{m^2 - p^2}{2 n s r^{n-1} \sqrt{-1}}.$$

Fig. 3.

Si à présent on prend dans la circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, l'arc AM , tel que son cosinus soit u , plus grand qu'un quart de cercle s'il y a $+u$, ou moindre si c'est $-u$; & l'arc AB qui soit à l'arc AM , comme l'unité à n ; & l'arc AB , qui soit à l'arc ABb , comme l'unité est à θ ; & si a est le sinus, & x le cosinus de cet arc, on aura $* m^n - p^n = 2 a r^{n-1}$; par conséquent $A + B = \frac{a r^n}{n s r^n}$.

* Art. 20.

En multipliant A & sa valeur par p , B & la sienne par m , leur somme sera $A p + B m = \frac{p m^2 - m p^2}{2 n s r^{n-1} \sqrt{-1}}$, ou parce que

$p m = r r$, en multipliant le numérateur par $r r$, & le divisant par son égal $p m$, il viendra $A p + B m = \frac{r^2 \times m^2 - r^2 \times p^2}{2 n s r^n \sqrt{-1}}$.

Or si f exprime le sinus de l'arc Bb , on aura $2 f r^{n-1} \sqrt{-1} = m^{n-1} - p^{n-1}$: Donc $A p + B m = \frac{f r^{n+1}}{n r^n}$. Enfin si l'on multiplie la valeur de la somme $A + B$ par z , il viendra

$\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{r^2}{n r^n} \times \frac{f r - a z}{r r - 2 x z + z z}$, parce que $m - z \times p - z = r r - 2 x z + z z$.

Si l'on fait $z - x = v$, on aura $z z - 2 x z + x x = v v$, ou $z z - 2 x z = v v - x x$, & en ajoutant $r r$ de part & d'autre, $z z - 2 x z + r r = v v + r r - x x$, ou si a exprime le sinus de l'arc AB , on aura $a a = r r - x x$, par la nature du cercle: donc $z z - 2 x z + r r = a a + v v$; mais $z - x = v$, donne $z = x + v$, & $a z = a x + a v$; en substituant ces valeurs, on

aura $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{a a + v v}{f r - a x - a v} \times \frac{r^2}{n r^n}$, ou à cause que $f r$

$= ax + ax$; cette somme deviendra enfin $= \frac{r^2}{n^2 r^2} \times \frac{n^2 - uv}{nn + uv}$.

Tout ce qu'on vient de dire à l'égard de la somme des deux premières fractions, convient également à la somme des deux autres quelconques; c'est pourquoi, si l'on divise la demi-circonférence en n parties égales, commençant au point B, telles que BC, CD, DE, &c. & que l'on prenne les arcs AB b , AC c , AD d , AE e , &c. tels qu'ils soient aux arcs AB, AC, AD, AE, &c. comme θ est à l'unité; en nommant les sinus des derniers a, b, c, d , ceux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. & leurs cosinus

x, λ, π, μ , on aura $\frac{x^2 + \pi^2}{x^2 + 2\lambda x^2 + \pi^2 + r^2} = \frac{r^2}{n^2 r^2} \times \text{par } \frac{nn - uv}{nn + uv} +$
 $\frac{b\lambda - \beta v}{bb + vv} + \frac{c\mu - \gamma v}{cc + vv} + \frac{d\pi - \delta v}{dd + vv} + \&c.$

REMARQUES.

I. Si l'on prend les arcs AB b , AC c , AD d , AE e , en sorte qu'ils soient aux arcs AB, AD, AE, comme $\theta + n$ est à l'unité; les arcs MB, Mc, Md, Me, seront aux arcs AB, AC, AD, AE, comme θ est à l'unité; par conséquent si l'on tire les sinus b_1, c_2, d_3, e_4 , ils seront exprimés par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, & les cosinus O 1, O 2, O 3, O 4, par x, λ, μ, π , &c.

II. Lorsque le second terme du diviseur $\frac{r^2}{n^2} - 2xz + rr$, est négatif, la fraction simple est $\frac{nn + uv}{nn + vv}$, & au contraire si c'est $+ 2xz$, elle est $\frac{nn - uv}{nn + vv}$: il est évident que les cosinus qui tombent sur le rayon MO, seront positifs, & au contraire; & les sinus qui tombent sur la demi-circonférence MAX, seront positifs, & au contraire.

Par exemple, si $n = 5$, $\theta = 3$, on aura $\alpha = b_1$, $-\beta = c_2$, $\gamma = d_3$, $-\delta = e_4$, $\pi = f_5$, & $x = O_1$, $\lambda = O_2$, $\mu = O_3$, $\pi = O_4$, $\pi = -O_5$; & par conséquent $\frac{x^2}{x^2 + 2\lambda x^2 + \pi^2 + r^2}$
 $= \frac{r^2}{5^2 r^2} \times \text{par } \frac{nn + uv}{nn + vv} + \frac{b\lambda - \beta v}{bb + vv} + \frac{c\mu - \gamma v}{cc + vv} + \frac{d\pi - \delta v}{dd + vv} + \frac{e\pi - \pi v}{ee + vv}$.

LEMME V.

27. Si l'on prend dans la circonférence d'un cercle autant de parties égales que l'on voudra, telles que AB, BC, CD, DE, &c. en tirant les cordes AB, AC, AD, BH, on aura toujours

LI ij

$AD : AC \pm AE :: BO : BH$; il y aura $+AE$, ou $-AE$, selon que les points D, E , tomberont du même, ou du différent côté du point A , ou du diamètre AH .

Soit AC prolongée, & DK tirée de telle manière que $DK = DA$; cela posé, puisque $AD = DK$, $CD = DE$, & les deux angles DKC , DEA , étant mesurés par la moitié du même arc ACD , sont égaux ; les triangles ADE , CDK , seront semblables & égaux ; & ainsi $CK = AE$.

Or comme les arcs AB , CD , sont égaux, les angles BHA , CAD , seront égaux ; donc les triangles isocèles HOB , ADK , seront semblables ; par conséquent $AD : (AK) AC \pm AE :: BO : BH$.

COROLLAIRE I.

28. Soient A, B, C, D , les sinus des moitiés des arcs AB , AC , AD , AE , & a le cosinus de l'arc AB , on aura $2A = AC$, $2C = AD$, $2E = AE$, & $2u = BH$; par conséquent $2C : 2B \pm 2D :: r : 2u$, ou $2u C = r B \pm r D$.

COROLLAIRE II.

29. Les triangles isocèles & semblables BOH , ABC , donnent $BO (r) : BH (2u) :: AB (2A) : AC (2B)$, ou bien $2u A = r B$.

PROBLEME VI.

29. Réduire la fraction $\frac{x^t + a}{x^{2n} + 2ux^n r^n - 1 + r^{2n}}$, en des fractions simples, lorsque θ est plus grand que n , & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binômes.

Soit $\frac{x^t + a}{x^{2n} + 2ux^n r^n - 1 + r^{2n}} = A x^{t-2n} + B r^n x^{t-2n} + C r^{2n} x^{t-4n} + D r^{3n} x^{t-6n} \dots \omega Q + \nu R$, où Q, R , expriment les restes, après que la division a été continuée tant que l'exposant de x est positif, & ω, ν , leurs coefficients.

En réduisant cette égalité sous le même dénominateur, on aura

$$s z^{t+n} = A z^{t+n} \left\{ \frac{+B}{\mp \frac{1}{r}} A \right\} \times r^n z^t \left\{ \frac{+C}{\mp \frac{1}{r}} B \right\} \times r^{2n} z^{t-n}$$

$$\left\{ \frac{+D}{\mp \frac{1}{r}} C \right\} \times r^{2n} z^{t-2n} \left\{ \frac{+Q}{\mp \frac{1}{r}} D \right\} r^n z^{t-n}$$

$$\left\{ \frac{+R}{+D} \right\} r^n z^{t-n}$$

De là il suit qu'en comparant les coefficients, on aura $A = s$, $B \mp \frac{1}{r} A = 0$, $A + C \mp \frac{1}{r} B = 0$, $B + D \mp \frac{1}{r} C = 0$, $\omega + C \mp \frac{1}{r} D = 0$, $\omega + D = 0$; ce qui donne $A = s$, $\pm 2uA = rB$, $\pm 2uB = rA + rC$, $\pm 2uC = rB + rD$, $\pm 2uD = rC + r\omega$, $v = -D$.

Or si q exprime le nombre de fois que n est contenu dans θ exactement, il est évident 1°. que la suite ci-dessus contiendra q termes, sans compter les restes; en supposant la division continuée, tant que l'exposant de z soit positif.

2°. Si s exprime le sinus Mm , d'un arc AM , dont le cosinus *Fig. 11.* est u , moindre qu'un quart de cercle lorsqu'il y a $-u$, ou plus grand lorsqu'il y a $+u$, dont le rayon est r ; alors les lettres A, B, C, D , &c. exprimeront les sinus Nn, Qq , &c. des arcs * dou- *Art. 18. 12°* ble, triple, quadruple, &c. de cet arc.

3°. Que si les arcs AR, AS , répondent aux q & $q+1$, divisions, on aura $\omega = Ss$, $-v = Rr$; mais parce que $Q = r^{t-n} z^{t-n}$, & $R = r^{t-n} z^{t-n}$, lorsque $D r^{t-n} z^{t-n}$ est le dernier terme, il est évident que $Q = r^{q-n} z^{t-q-n}$, & $R = r^{q-n} z^{t-q-n}$, lorsque $D r^{q-n} z^{t-q-n}$ est le dernier terme. Donc

$$\frac{z^{t-n}}{z^{t-n} \mp 1 \pm z^{t-n} \mp 1 + \dots} = \frac{1}{r} \times \text{par } Mm \times z^{t-n} + Nn \times r^n z^{t-n} + Qq \times r^{2n} z^{t-n} \omega + v R.$$

Le reste étant divisé par le dénominateur & réduit en des fractions simples par le problème V, achevera la solution de ce problème.

31. Si l'on prend l'arc AB, tel que $n \times AB = AM$, comme on a $q \times AM = AR$, & $q+1 \times AM = AS$, on aura $q n \times AB = AS$, & $q n + n \times AB = AS$: or si m, p , expriment les racines de l'équation $z^2 - 2xz + rr = 0$, On aura $* s = \frac{p^n - m^n}{2r^n - 1 \sqrt{-1}}$, & par la même raison Rr sera $= \frac{m^n - p^n}{2r^n - 1 \sqrt{-1}}$, & $Ss = \frac{m^{2n} + p^{2n}}{2r^{2n} + 1 \sqrt{-1}}$.

C O R O L L A I R E II.

32. De là il suit que si l'on met la racine m au lieu de z , dans le reste $\frac{Ss}{s} \times r^{qn} z^{qn-n} - \frac{Rr}{s} \times r^{qn-n} z^{qn-n}$, on aura $\frac{Ss \times m^{-qn} - Rr \times r^n m^{-qn-n}}{s} \times \frac{r^{2n} m^{l+n}}{s}$.

Or si l'on multiplie la valeur de Ss , par m^{-qn} , il viendra $m^{-qn} \times Ss = \frac{m^n - m^{-n} p^{2n}}{2r^{2n} + 1 \sqrt{-1}}$; & en multipliant celle de Rr , par $r^n m^{-qn-n}$, alors $r^n m^{-qn-n} \times Rr = \frac{r^{2n} m^{-n} - r^{2n} p^{2n} m^{-n-n}}{2r^{2n} + 1 \sqrt{-1}}$; mais à cause que $* r^{2n} = p^n m^n r^{2n} m^{-n}$ sera $= p^n$, & en multipliant chaque côté par $p^{qn} m^{-qn}$, on aura $r^{2n} p^{qn} m^{-qn-n} = p^{qn+n} m^{-qn}$; par conséquent en substituant ces valeurs dans le reste, il viendra $\frac{m^n - m^{-n} p^{2n} + p^{qn+n} m^{-qn} - p^{qn+n} m^{-qn-n}}{2r^{2n} + 1 \sqrt{-1}} \times$ par m^{l+n} , ou $\frac{m^n - p^n}{2r^{2n} + 1 \sqrt{-1}} \times m^{l+n} = m^{l+n}$.

C O R O L L A I R E III.

33. Si A & B expriment les numerateurs des deux premières fractions simples, on aura $A = \frac{m^{l+n}}{2n(m^{2n}-1)(m^{2n}-1)}$, ou en divisant par m^{n-1} , $A = \frac{m^{l+1}}{2n(m^{2n}-1)(m^{2n}-1)}$, ou à cause que $* 2u^{n-1} = m^n + p^n$, $A = \frac{m^{l+1}}{n(m^n - p^n)}$, ou bien $A = \frac{m^{l+1}}{2n r^{2n-1} \sqrt{-1}}$; & par la même raison on aura $* B = \frac{p^{l+1}}{2n r^{2n-1} \sqrt{-1}}$; par conséquent les

fractions simples peuvent être trouvées de la même manière que dans l'article 26^{me} : il faut prendre garde que l'exposant de z , dans le numérateur est ici $\theta + n$, & là il étoit $\theta + n - 1$; enfin $\theta + 1$, répond à θ dans le premier cas.

Il est donc manifeste qu'on peut toujours réduire une fraction trinome en des fractions simples, soit que l'exposant de la quantité variable dans le numérateur qui l'affecte soit plus grand ou moindre que celui dans le dénominateur.

PROBLEME VII.

34. Trouver la fluente de * $\frac{xyx - xzx}{rr + xzx + xz}$. * Art. 23

En supposant $z - x = v$, cete fluxion sera changée * en Fig. 124

$\frac{xyx - xzx}{rr + xzx + xz}$. Or si dans la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, l'on prend l'arc AB , moindre qu'un quart de cercle, telle que son cosinus $OQ = x$; & si dans le rayon prolongé vers A , s'il est nécessaire, on prend $OP = z$; en tirant les lignes PB , OB , je dis que $\alpha(PBO) - x(PB : BO)$ sera la fluente cherchée.

L'on suppose que $\alpha(PBO)$ exprime la mesure de l'angle PBO , & dont le rayon est α , & $x(PB : BO)$ le logarithme de $\frac{PB}{BO}$, multiplié par x . Car si du centre B , l'on décrit un arc avec le rayon $BQ(a)$, coupant PB en T , & BO en V , on aura $\frac{aa + vv}{aa + vv}$ pour la fluxion de l'arc QT , & $\frac{vv}{aa + vv}$ pour la fluxion du logarithme de $\frac{\sqrt{aa + vv}}{a} = \frac{PB}{a}$; mais lorsque $z = 0$, $z - x = v$, donne $-x = v$, & $a = r$; & l'arc QT devient alors l'arc $-QV$; c'est pourquoi $TQ + QV$, ou TV , exprimera la fluente complete de $\frac{aa + vv}{aa + vv}$: & comme $a : a :: TV : \frac{a}{a} TV$ égal à un arc semblable à l'arc TV , dont le rayon est a , il s'en suit que $\alpha(PBO) - x(PB : BO)$ exprimera la fluente demandée.

Lorsque x sera plus grand que z , le point P tombera entre les points O & Q , comme dans la figure 13 ; & lorsque l'équation Fig. 134 simple sera $zz + 2xz + rr$, le point Q tombera de l'autre côté du centre O , à l'égard du point P comme dans la figure 14, & Fig. 144 $\alpha(PBO) + x(PB : BO)$ sera alors la fluente cherchée.

Pour rendre ceci plus à portée de la pratique, on nommera D, le nombre de degrés de l'arc TV, & le logarithme tabulaire de $\frac{PB}{BO}$, L; ce qui donnera $aD \times 0.01745329 \mp x L \times 2.30258509$, pour cette fluente, par ce qui a été dit dans la seconde section du troisième livre qui traite des fluentes.

P R O B L E M E V I I I.

35. Trouver la fluente de $\frac{dx x^{\theta-1}}{e+fx^{\theta}}$, lorsque θ est un nombre entier quelconque.

Si l'on réduit la fraction $\frac{x^{\theta-1}}{fx^{\theta}+e}$, en une suite par une division continuelle, & multipliant les termes par le numérateur $dx x^{\theta-1}$, & en prenant la fluente de chaque terme en la manière ordinaire, on aura $\frac{dx^{\theta}}{nf} \times$ par $\left(\frac{x^{-\theta}}{e-1} - \frac{e}{f} \times \frac{x^{-\theta-1}}{e-1} + \frac{ee}{ff} \times \frac{x^{-\theta-2}}{e-1} - \frac{e^3}{f^3} \times \frac{x^{-\theta-3}}{e-1} \right) \dots \pm \frac{de^{\theta-1}}{nf^{\theta}} l \frac{e+fx^{\theta}}{e}$, pour la fluente demandée. L'on doit remarquer que cette suite doit être continuée à $\theta - 1$ termes, outre le dernier terme $l \frac{e+fx^{\theta}}{e}$, qui exprime le logarithme de $\frac{e+fx^{\theta}}{e}$; & le signe de ces logarithmes doit être le contraire de celui du dernier terme de la suite.

Lorsque θ est négatif, la fluente de $\frac{dx x^{-\theta-1}}{e+fx^{\theta}}$, sera $\frac{dx^{-\theta}}{ne} \times$ par $\left(\frac{-1}{e} + \frac{f}{e} \times \frac{x^{\theta}}{e-1} - \frac{ff}{ee} \times \frac{x^{2\theta}}{e-1} + \frac{f^3}{e^3} \times \frac{x^{3\theta}}{e-1} \right) \dots \mp \frac{df^{\theta}}{ne^{\theta+1}} l \frac{e+fx^{\theta}}{e}$; en faisant e le premier terme du diviseur, cette suite doit être continuée au nombre θ de termes.

Par exemple, si $\theta = 5$, la fluente de $\frac{dx x^{5-1}}{e+fx^5}$, sera $\frac{dx^5}{4nf} \rightarrow \frac{dx x^{10}}{3nff} + \frac{d e e x^{10}}{2 n f^3} - \frac{d e^3 x^5}{n f^4} + \frac{d e^4}{n f^5} l \frac{e+fx^5}{e}$.

Et la fluente de $\frac{dx x^{-5-1}}{e+fx^5}$, sera $\frac{-dx}{5 n e x^{10}} + \frac{df}{4 n e e x^{10}} - \frac{dff}{3 n e^3 x^{15}} + \frac{df^2}{2 n e^4 x^{20}} - \frac{df^3}{n e^5 x^{25}} + \frac{df^4}{n e^6} l \frac{e+fx^5}{e^6}$.

P R O B L E M E

PROBLEME IX.

36. Trouver la fluente de $\frac{dz^{1^m+\frac{1}{\lambda}}-1}{e+fz^n}$, lorsque θ , δ , λ , sont des nombres entiers quelconques positifs, & que δ est moindre que λ .

Il est évident que cette fluxion peut être réduite à $\frac{d \delta^{\frac{1}{\lambda}} z^{\frac{1}{\lambda}}-1}{f^{\frac{1}{\lambda}} e+fz^n}$, par une division continuelle de la même manière que dans le problème précédent. Or si l'on fait $\frac{e}{f} = a^n$, & $v = a \times \frac{z}{a} l^{\frac{n}{\lambda}}$, Fig. 13, cette dernière fluxion peut être changée en celle-ci, $\frac{\lambda \delta^{\frac{1}{\lambda}}}{n f^{\frac{1}{\lambda}+1}}$.

$\frac{\delta}{a^{\frac{1}{\lambda}}+1}-\delta^{-n} \times \frac{v^{\frac{1}{\lambda}-1}}{a^{\frac{1}{\lambda}}+v^{\frac{1}{\lambda}}}$. Or si la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = a$, est divisée en λ parties aux points B, C, D, E, &c. & si l'on prend les arcs ABb , ACc , ADd , $A E e$, &c. qui soient aux arcs AB , AC , AD , AE , &c. comme δ est à l'unité : cela posé, en prenant $OP = v = a \times \frac{z}{a} l^{\frac{n}{\lambda}}$; si l'on tire les sinus b_1 , c_2 , d_3 , e_4 , &c. & du point P, & du centre O, des lignes aux points B, C, D, E, &c. en faisant $\theta + \frac{\delta}{\lambda}$

$= r$, la fluente de $\frac{dz^{1^m+\frac{1}{\lambda}}-1}{e+fz^n}$, lorsque $\frac{e}{f}$, ou a^n est positif, sera

$$\frac{\delta z^n}{n f} \times \text{par} \left(\frac{z^{-n}}{r-1} - \frac{e}{f} \times \frac{z^{-1-n}}{r-2} + \frac{e^2}{f^2} \times \frac{z^{-2-n}}{r-3} - \frac{e^3}{f^3} \times \frac{z^{-3-n}}{r-4} + \frac{e^4}{f^4} \times \frac{z^{-4-n}}{r-5} - \dots + \frac{e^{\frac{1}{\lambda}-1}}{f^{\frac{1}{\lambda}}} \times \frac{z^{-\frac{1}{\lambda}-n}}{r-\frac{1}{\lambda}} \right) \times \left\{ \begin{array}{l} \text{O}_1 (\text{PB:BO}) + b_1 (\text{PBO}) \\ \text{O}_3 (\text{PD:DO}) + d_3 (\text{PDO}) \\ \text{O}_5 (\text{PE:EO}) + e_5 (\text{PEO}) \\ \text{H O} (\text{PH:HO}) \&c. \end{array} \right.$$

Mais si $\frac{e}{f}$, ou a est négatif, cette fluente sera

$$\frac{\delta z^n}{n f} \times \text{par} \left(\frac{z^{-n}}{r-1} + \frac{e}{f} \times \frac{z^{-1-n}}{r-2} + \frac{e^2}{f^2} \times \frac{z^{-2-n}}{r-3} + \frac{e^3}{f^3} \times \frac{z^{-3-n}}{r-4} + \frac{e^4}{f^4} \times \frac{z^{-4-n}}{r-5} + \dots + \frac{e^{\frac{1}{\lambda}-1}}{f^{\frac{1}{\lambda}}} \times \frac{z^{-\frac{1}{\lambda}-n}}{r-\frac{1}{\lambda}} \right) \times \left\{ \begin{array}{l} -\text{AO} (\text{PA:AO}) \\ +\text{O}_2 (\text{PC:CO}) - c_2 (\text{PCO}) \\ +\text{O}_4 (\text{PE:EO}) + e_4 (\text{PEO}) \\ -\text{O}_6 (\text{PG:GO}) + g_6 (\text{PGO}) \end{array} \right.$$

Mm

Il faut remarquer que le signe de la quantité que multiplie les mesures des angles & des logarithmes, doit être le contraire de celui du dernier terme, dans la première fluente, & de même dans la seconde.

C O R O L L A I R E.

37. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{dix^{-\theta} + ix^{-\theta}}{e + fx^{\theta}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{dix^{-\theta} - ix^{-\theta}}{e x^{-\theta} + f}$; & comme $\frac{-ix^{-\theta} - ix^{-\theta}}{-n} = \theta + 1 - \frac{\theta}{\lambda}$; par conséquent, si l'on suppose que $r = \theta + 1 - \frac{\theta}{\lambda}$, dans les deux dernières fluentes, & que l'on mette e pour f , f pour e , $-n$ pour n , & i^{-n} pour i^n , cette fluente deviendra, la fluente de $\frac{dix^{-\theta} + ix^{-\theta}}{e + fx^{\theta}}$.

E X E M P L E.

Soit $\theta = 5$, $\lambda = 7$, $\theta = 3$, la fluente de $\frac{dix^{3\lambda} + ix^{3\lambda}}{e + fx^{\theta}}$, sera dans le premier cas.

$$\frac{7dex^{27}}{19nf} - \frac{7dex^{27}}{12nff} + \frac{7dex^{27}}{5nf^3} - \frac{2d}{nf} \times \frac{e^{27}}{f} - \frac{2}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +AO(PH:HO) \end{array} \right\}$$

Et celle du second cas sera

$$\frac{7dex^{27}}{19nf} + \frac{7dex^{27}}{12nff} + \frac{7dex^{27}}{5nf^3} + \frac{2d}{nf} \times \frac{e^{27}}{f} - \frac{2}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} -AO(PB:BO) \\ +O_2(PC:CO) - c_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + e_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\}$$

Ceci s'accorde parfaitement avec les tables des fluentes du Docteur Smith, p. 145. du livre intitulé *Harmonia Mensurarum*.

P R O B L E M E X.

38. Trouver la fluente de $\frac{dix^{\theta} + ix^{\theta}}{e + fx^{\theta} + gx^{2\theta}}$, lorsque θ est un nombre entier quelconque, & que le dénominateur peut être réduit en deux binomes.

Soit $\frac{dx^{2n+1}}{g x^{2n} + f x^n + e} = A x^{2n-n} + B e x^{2n-1-n} + C e e x^{2n-1-n} + D e^3 x^{2n-1-n} \dots \omega F + \nu G.$

En réduisant cette égalité sous la même dénomination, on aura

$$d x^{2n+1} = g A x^{2n-n} + g B \} e x^{2n-1-n} + g C \} e e x^{2n-1-n} + g D \} \\ + f A \} + f B \} + f C \} + f D \} \\ + e A \} + e B \}$$

$$e^3 x^{2n-1-n} + f D \} e^4 x^{2n-4-n} + e D e^5 x^{2n-1-n} \\ + e C \}$$

Et en comparant les coefficients des termes égaux, on aura $g A = d$, $g B + f A = 0$, $g C + f B + e A = 0$, $g D + f C + e B = 0$, $f D + e C = \omega$, $e D = \nu$: d'où l'on tire $A = \frac{d}{g}$, $-B = \frac{fA}{g}$, $-C = \frac{fB + eA}{g}$, $-D = \frac{fC + eB}{g}$, $-\omega = fD + eC$, $-\nu = eD$.

Par conséquent la fluente de $\frac{dx^{2n+1}}{g x^{2n} + f x^n + e}$, sera $\frac{x^{2n}}{n g} \times$ par $\left(\frac{A}{1-1} + \frac{B}{1-1} \times \frac{e}{x^2} + \frac{C}{1-1} \times \frac{e^2}{x^{1n}} + \frac{D}{1-1} \times \frac{e^3}{x^{1n}} + \frac{E}{1-1} \times \frac{e^4}{x^{1n}} \right) \dots - fD + eC, F - eDG.$

Cette suite doit être continuée à $\theta - 1$, termes sans le reste; & il faut remarquer que F est la fluente de $\frac{dx^{2n-1}}{g x^{2n} + f x^n + e}$ & G, celle de $\frac{dx^{2n-1}}{g x^{2n} + f x^n + e}$; mais lorsque $\theta = 2$, le coefficient C deviendra $= 0$.

COROLLAIRE I.

39. Si l'on fait $\nu = \frac{f}{2g} + x^n$, & $aag = \frac{1}{2}ff - eg$, la flu-
xion de G, peut être changée en celle-ci, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{g\nu\nu - aa}$, & celle
de F, en $\frac{1}{2ng} \times \frac{2g\nu\nu - f^2}{g\nu\nu - aa}$. Or si l'on fait $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$, $T = \nu$,
 $S = \frac{g\nu\nu - aa^2}{g}$, $M = \log. \frac{e + f x^n + g x^{1n}}{e}$, on aura $G = \frac{1}{n a a} (1)$,
 $F = \frac{1}{2ng} M + \frac{f}{2ng a a} (1)$; en supposant que (1) est le logarithme
de $\frac{R+T}{S}$, multiplié par R, lorsque $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$, ou un arc de cer-
cle dont le rayon est R, la tangente T, & la sécante S, lorsque
M m ij

$R = \frac{a}{\sqrt{g}}$; mais comme cette dernière valeur est impossible , on prend $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$; car dans ce cas la fluxion $\frac{a}{g\sqrt{g}+aa}$, devient $\frac{a}{g\sqrt{g}+aa}$, ou bien $\frac{1}{g} \times \frac{a}{a\sqrt{g}+vv}$.

C O R O L L A I R E I I.

40. De là il suit que la fluente de $\frac{d \dot{x} z^{n-1}}{e+fz^n+gz^{1n}}$, fera $\frac{dz^n}{n\dot{g}} - \frac{f\dot{d}}{2ng\dot{g}}$ $M + \frac{eg-f\dot{f}}{2ng\dot{g}} d(1)$; parce que C est ici = 0 , $\theta = 2$, & $D = \frac{d}{g}$.

C O R O L L A I R E I I I.

41. Lorsque θ est négatif , la fluxion de $\frac{d \dot{x} z^{-\theta+n-1}}{e+fz^n+gz^{1n}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{d \dot{x} z^{-\theta+n-1}}{e+fz^n+gz^{1n}}$: or comme $\frac{e+n}{n} = \theta + 1$; en mettant e pour g , g pour e , $-n$ pour n , & $\frac{1}{z^n}$ pour z^n , dans la fluente ci-dessus , elle deviendra la fluente de $\frac{d \dot{x} z^{-\theta+n-1}}{e+fz^n+gz^{1n}}$; comme il suit $\frac{dz^n}{n\dot{g}}$ $\times$ par $\left(\frac{A}{e-1} + \frac{B}{e-1} \times \frac{z^n}{e} + \frac{C}{e-1} \times \frac{z^{1n}}{e} + \frac{D}{e-1} \times \frac{z^{1n}}{e^1} + \frac{E}{e-1} \times \frac{z^{4n}}{e^1} \right) --- fD + gC, F - gDC.$

$$\left. \begin{aligned} +A &= \frac{d}{e} \\ -B &= \frac{fA}{e} \\ -C &= \frac{fB+gA}{e} \\ -D &= \frac{fC+gB}{e} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v &= \frac{1e+fz^n}{1ez^n} \\ aa &= \frac{ff-4eg}{4e} \\ R &= \frac{a}{\sqrt{e}} \\ S &= \frac{egv-a\dot{a}}{e} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} G &= \frac{1}{n\dot{g}} (1) ; \\ F &= \frac{1}{2ng} M - \frac{f}{2ng\dot{g}} (1) ; \\ M &= \frac{e+fz^n+gz^{1n}}{z^{1n}} . \end{aligned}$$

Ainsi la fluente de $\frac{d \dot{x} z^{-\theta+n-1}}{e+fz^n+gz^{1n}}$, fera $\frac{dz^n}{n\dot{g}} + \frac{df}{2ng\dot{g}} M + \frac{eg-f\dot{f}}{2ng\dot{g}} d(1)$.

P R O B L E M E X I.

42. Trouver la fluente de $\frac{d \dot{x} z^{n-1}}{z^{1n}+2nz^n+z^{1n}+1}$, lorsque θ , n sont des nombres entiers quelconques , & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binômes.

Si dans la circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, on prend l'arc AM , dont le cosinus soit u , plus grand qu'un quart de cercle, si le second terme du dénominateur est positif, ou moindre s'il est négatif : en prenant autant d'arcs tels que MN , NQ , QR , RS , &c. égaux à l'arc AM , qu'il y a d'unités dans $\theta - 1$; & que de leurs extrémités l'on tire les perpendiculaires Nn , Qq , Rr , Ss , &c. à OM prolongé. Cela posé, si dans le rayon AO , on prend $OP = z$, & si l'arc AB est pris tel qu'il soit à l'arc AM , comme l'unité est à n , en divisant la circonférence en n parties égales aux points B , C , D , E , &c. & en prenant enfin les arcs Abb , Acc , $Ad d$, Aee , &c. tels qu'ils soient aux arcs AB , AC , AD , AE , &c. comme $\theta + n$ est à l'unité ; si l'on tire après cela du point B , & du centre O , des lignes aux points B , C , D , E , &c. aussi bien que les sinus b_1 , c_2 , d_3 , e_4 , &c. la fluente de $\frac{d \cdot z^{n-1} - 1}{z^{1n} + 1 \cdot n z^n r^{n-1} + r^{1n}}$, sera *

* Art. 26. 34.

$$\frac{dz^n}{z^n} \times \text{par} \left(\frac{Nn}{n-1} + \frac{Qq}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-n}}{z} - \frac{Rr}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-1n}}{z} \right. \\ \left. - \frac{Ss}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-1n}}{z} \right) - \dots + \frac{dz^n}{n \cdot z^n} \left\{ \begin{array}{l} +b_1(PB:BO) + O_1(PBO) \\ -c_2(PC:CO) + O_2(PCO) \\ -d_3(PD:DO) + O_3(PDO) \\ -e_4(PE:EO) - O_4(PEO) \\ +f_5(PF:FO) - O_5(PFO) \end{array} \right\}$$

Et la fluente de $\frac{d \cdot z^{n-1} - 1}{z^{1n} + 1 \cdot n z^n r^{n-1} + r^{1n}}$, sera

$$\frac{dz^n}{z^n} \times \text{par} \left(\frac{Nn}{n-1} + \frac{Qq}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-n}}{z} - \frac{Rr}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-1n}}{z} \right. \\ \left. - \frac{Ss}{z^{n-1}} \times \frac{z^{-1n}}{z} \right) - \dots + \frac{dz^n}{n \cdot z^n} \left\{ \begin{array}{l} +b_1(PB:BO) + O_1(BPO) \\ -c_2(PC:CO) + O_2(CPO) \\ -d_3(PD:DO) + O_3(DPO) \\ -e_4(PE:EO) - O_4(EPO) \\ +f_5(PF:FO) - O_5(FPO) \end{array} \right\}$$

Car si l'on fait $z = \frac{r}{v}$, cette dernière fluxion peut être changée en celle-ci, $\frac{r^{-1} dz \cdot d \cdot v^{n-1} - 1}{v^{1n} + 1 \cdot n v^n r^{n-1} + r^{1n}}$; dont la fluente peut être trouvée de la même manière que dans le premier cas ; mais à cause que l'angle dont la tangente est v , est le complément de l'angle dont la tangente est z , à un angle droit, selon ce qui a été dit dans le septième problème ; c'est pourquoi les angles PBO , PCO , &c. dans le premier cas deviennent BPO , CPO , &c. dans le second.

P R O B L E M E X I I .

43. Trouver la fluente de $\frac{d \, x^n + \sqrt{x^n - 1}}{x^{1+n} + 1 + n x^n r^{n-1} + r^{1+n}}$, lorsque n, δ, λ , sont des nombres entiers quelconques, & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes.

La même construction étant supposée comme dans le problème précédent, excepté qu'il y a ici autant de lignes telles que $N n, R r, S s, T t$, &c. qu'il y a d'unités dans la fraction $\frac{\delta}{\lambda}$, & que les arcs $A B b, A C c, A D d, A E e$, &c. sont ici aux arcs $A B, A C, A D, A E$, &c. comme $\lambda + \delta$ est à l'unité, & $O P = r \times \frac{\sqrt{x^n - 1}}{r}$; la fluente cherchée sera

$$\frac{\lambda d r^{\frac{\delta}{\lambda}}}{n s x^n} \times \text{par} \left(\frac{N n}{\delta - \lambda} + \frac{Q q}{\delta - 3\lambda} \times \frac{r^{-n}}{x} - \frac{R r}{\delta - 5\lambda} \times \frac{r^{-2n}}{x^2} \right. \\ \left. - \frac{S s}{\delta - 4\lambda} \times \frac{r^{1n}}{x} \right) \dots + \frac{d r^{\frac{\delta}{\lambda}}}{n s r^n} \left\{ \begin{array}{l} + b_1 (P B : B O) + O_1 (P B O) \\ - c_2 (P C : C O) + O_2 (P C O) \\ - d_3 (P D : D O) + O_3 (P D O) \\ - e_4 (P E : E O) - O_4 (P E O) \\ + f_5 (P F : F O) - O_5 (P F O) \end{array} \right\}$$

Et la fluente de $\frac{d \, x^n + \sqrt{x^n - 1}}{x^{1+n} + 1 + n x^n r^{n-1} + r^{1+n}}$, fera

$$\frac{\lambda d r^{\frac{\delta}{\lambda}}}{n s} \times \text{par} \left(\frac{N n}{\delta - \lambda} + \frac{Q q}{\delta - 3\lambda} \times \frac{r^{-n}}{x} - \frac{R r}{\delta - 5\lambda} \times \frac{r^{-2n}}{x^2} \right. \\ \left. - \frac{S s}{\delta - 4\lambda} \times \frac{r^{1n}}{x} \right) \dots + \frac{d r^{\frac{\delta}{\lambda}}}{n s r^n} \left\{ \begin{array}{l} + b_1 (P B : B O) + O_1 (O P B) \\ - c_2 (P C : C O) + O_2 (O P C) \\ - d_3 (P D : D O) + O_3 (O P D) \\ - e_4 (P E : E O) - O_4 (O P E) \\ + f_5 (P F : F O) - O_5 (O P F) \end{array} \right\}$$

Car si l'on fait $v = r \times \frac{\sqrt{x^n - 1}}{r}$, la fluxion $\frac{d \, x^n + \sqrt{x^n - 1}}{x^{1+n} + 1 + n x^n r^{n-1} + r^{1+n}}$ peut

être changée en celle-ci $\frac{\lambda}{n} \frac{r^{\frac{\delta}{\lambda}}}{r^{1+n} + 1 + \delta - n} \times \frac{d \, v + v^{1+n}}{v^{1+\lambda} + 1 + n v^{\lambda} r^{1-\lambda} + r^{1+\lambda}}$, dont la fluente peut être trouvée de la même manière que dans le dernier problème.

P R O B L E M E X I I I .

44. Trouver la fluente de $\frac{d \, x^n + \sqrt{x^n - 1}}{x^{1+n} + 1 + n x^n r^{n-1} + r^{1+n}}$, lorsque δ est moindre que λ , & que le dénominateur peut être réduit en deux binomes.

Si l'on suppose $a^n = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\sqrt{ff-4e}$, & $b^n = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\sqrt{ff-4e}$; cette fluxion peut être changée en celle-ci $\frac{1}{\sqrt{ff-4e}}$

$\times$ par $\left(\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{b^n+x^n}\right) - \frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{n+x^n}$; c'est pourquoi si l'on retient la construction de l'article 36, & $OP = b \times \frac{x^n}{b^n}, \theta + \frac{\theta}{\lambda} = r$,

la fluente de $\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{b^n+x^n}$, sera

Fig. 7:

$$\frac{dx^n}{nx^n} \times \text{par} \left(\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-3} \times \frac{b^n}{x} + \frac{1}{r-5} \times \frac{b^{3n}}{x^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{r-7} \times \frac{b^{5n}}{x^5} + \frac{1}{r-9} \times \frac{b^{7n}}{x^7} \right) \dots + \frac{1}{n} \frac{b^{r^n-1}}{b^n} \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array} \right\}$$

Et la fluente de $\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{x^n-b^n}$, sera

$$\frac{dx^n}{nx^n} \times \text{par} \left(\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-3} \times \frac{b^n}{x} + \frac{1}{r-5} \times \frac{b^{3n}}{x^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{r-7} \times \frac{b^{5n}}{x^5} + \frac{1}{r-9} \times \frac{b^{7n}}{x^7} \right) \dots + \frac{1}{n} \frac{b^{r^n-1}}{b^n} \left\{ \begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O_2(PC:CO) - c_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + e_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\}$$

Si l'y a $b^n - x^n$ au lieu de $x^n - b^n$, il ne faut que changer la fluxion en $\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{x^n-b^n}$.

COROLLAIRE I.

45. Il est évident qu'en changeant b pour a dans la dernière fluente, elle deviendra celle de $\frac{d \pm x^{a^n+\frac{1}{2}n-1}}{a^n \pm x^n}$, laquelle étant retranchée de la première, & la différence divisée par $\sqrt{ff-4e}$, donnera la fluente cherchée de $\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{b^n+x^n}$.

COROLLAIRE II.

46. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{d \pm x^{b^n+\frac{1}{2}n-1}}{b^n+x^n}$, peut être

changée en celle-ci, $\frac{d \dot{x} \dot{x}^{n-1} - \dot{x}^{n-1} \dot{x}}{\dot{x}^n \dot{x} - \dot{x} + 1}$; & comme $\frac{\dot{x}^{n-1} - \dot{x}}{\dot{x}^n \dot{x} - \dot{x} + 1} = \theta + 1 - \frac{\dot{x}}{\dot{x}}$; en supposant dans la dernière fluente $r = \theta + 1 - \frac{\dot{x}}{\dot{x}}$, & que l'on mette b^n pour l'unité, l'unité pour b , $\dot{x}^n$ pour $\dot{x}^n$, & $-n$ pour n , on aura la fluente cherchée.

P R O B L E M E X I V.

47. Trouver la fluente de $d \dot{x} \dot{x}^m \times e + f \dot{x}^n$, lorsqu'elle peut être trouvée exactement, ou qu'elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques.

Soit $\frac{m+1}{n} = \theta$, $P = e + f \dot{x}^n$, & soit $P^{n+1} \times$ par $(K \dot{x}^{1-n} + L \dot{x}^{1-n} + M \dot{x}^{1-n} + N \dot{x}^{1-n}) \dots + X F$ la fluente demandée; la fluxion de cette fluente étant disposée par ordre en faisant $\theta + n = r$, sera $(r f K + \frac{\theta-1}{r-1}, e K) \dot{x}^{r-1} + \frac{\theta-2}{r-2}, e L) \dot{x}^{r-2} + \frac{\theta-3}{r-3}, e M) \dot{x}^{r-3} + \frac{\theta-4}{r-4}, e N) \dot{x}^{r-4} + \dots + n \dot{x}^{r-n-1} P^n$.

Car si $\dot{x}^{1-n} P^{n+1}$, exprime un terme quelconque de cette fluente supposée, sa fluxion sera $\theta n - s n$, $\dot{x}^{1-n} P^{n+1} + n + 1$, $\dot{x}^{1-n} \dot{P}$.

Ou bien $(\theta n - s n, \dot{x}^{1-n} P + n + 1, \dot{x}^{1-n} \dot{P}) \times$ par $\dot{x}^{1-n} P^n$.

Ou à cause que $P = e + f \dot{x}^n$, & $\dot{P} = n f \dot{x}^{n-1}$ $(\theta - s, e \dot{x}^{1-n} + \frac{\theta-s}{n+1} f \dot{x}^{n-1}) \times$ par $n \dot{x}^{1-n} P^n$.

Ou enfin parce que $\theta + n = r$, $(\theta - s, e \dot{x}^{1-n} + \frac{\theta-s}{r-s+1}, f \dot{x}^{n-1}) \times$ par $n \dot{x}^{1-n} P^n$.

D'où en faisant s successivement égale à 1, 2, 3, 4, &c. on aura les fluxions des termes comme ci-dessus.

Or en faisant le coefficient $r f K$ du premier terme de cette fluxion égal au coefficient d de la fluxion proposée, & ceux des autres termes chacun égal à zero, on aura

$r f K$

$$rnfK = d.$$

$$\overline{\theta-1}, eK + \overline{r-1}, fL = 0, \text{ ou } +K = \frac{d}{rnf}.$$

$$\overline{\theta-2}, eL + \overline{r-2}, fM = 0 \quad -L = \frac{\theta-1}{r-1} \times \frac{de}{nrf^2}.$$

$$\overline{\theta-3}, eM + \overline{r-3}, fN = 0 \quad +M = \frac{\theta-1}{r-1} \times \frac{\theta-2}{r-2} \times \frac{de^2}{nrf^3},$$

$$-N = \frac{\theta-1}{r-1} \times \frac{\theta-2}{r-2} \times \frac{\theta-3}{r-3} \times \frac{de^3}{nrf^4}.$$

Mais parce que $x = \overline{\theta-4}$, $n \in N$, & $\hat{f} = z \hat{z}^{n-1} P^x$, lorsque $N \hat{z}^{n-1} P^{x+1}$ est le dernier terme de la suite; par la même raison $x = v n \in Q$, & $\hat{f} = z \hat{z}^{vn-1} P^x$, lorsque $Q \hat{z}^{vn} P^{x+1}$ est le dernier terme; en supposant v la moindre fraction de θ , ou de son égal $\frac{m+1}{n}$; par conséquent $\frac{dz^{vn-1}}{nrf} P^{x+1} -$

$\frac{\theta-1}{r-1} \times \frac{Ae}{fz^A} - \frac{\theta-2}{r-2} \times \frac{Be}{fz^B} - \frac{\theta-3}{r-3} \times \frac{Ce}{fz^C} - \frac{\theta-4}{r-4} \times \frac{De}{fz^D} - \dots - vn \in QF$ sera la fluente cherchée; les lettres A, B, C, D, expriment chacune le terme qui la précède avec son signe, & F le reste avec un signe contraire à celui du dernier terme.

COROLLAIRE I.

48. De là il suit que si θ , ou $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, & r , ou $\theta + \pi$, une fraction, ou un nombre entier plus grand que θ , la fluente sera toujours finie & exprimée par θ termes. Si $\theta = 1$, la fluente sera $\frac{dz^{n-1}}{1+\pi, n f}$, si $\theta = 2$, elle sera $\frac{dz^n}{2+\pi, n f} - \frac{d}{1+\pi, 2+\pi, n f f} \times$ par P^{x+1} .

COROLLAIRE II.

49. Lorsque θ , ou $\frac{m+1}{n}$ est négatif; en divisant la quantité $e + f \hat{z}^n$ sous le signe par $\hat{z}^n$, & multipliant celle hors du signe par son égal $\hat{z}^n$, la fluxion $d \hat{z}^{n-1} \times e + f \hat{z}^{2n}$, deviendra $d \hat{z}^{-(n+\pi-1)} \times e \hat{z}^{n+\pi} + f \hat{z}^n$. Or comme $\frac{n+\pi-1}{n} = \theta - \pi$; en mettant cette valeur au lieu de θ , dans $\theta + \pi = r$, on aura $\theta = r$; & en faisant $\theta - \pi = s$, & substituant e pour f , f pour e ,

Nn

ζ^n pour ζ^n , & $= n$ pour n dans la dernière fluente, elle deviendra $\frac{d \zeta^{n-1}}{n \zeta} P^{n-1} - \frac{n-1}{\zeta} \times \frac{A}{\zeta} f \zeta^n - \frac{n-2}{\zeta} \times \frac{B}{\zeta} f \zeta^n - \frac{n-3}{\zeta} \times \frac{C}{\zeta} f \zeta^n - \frac{n-4}{\zeta} \times \frac{D}{\zeta} f \zeta^n \dots n \vee QF.$

Il faut remarquer qu'on a ici $P = e \zeta^{-n} + f$, ou $P = \frac{e+f \zeta^n}{\zeta^n}$.

COROLLAIRE III.

50. De là il suit que si s , ou $\theta - \pi$ est un nombre entier, & θ une fraction, ou un nombre entier plus grand que s , la fluente sera toujours finie & exprimée par s , ou $\theta - \pi$ termes.

Si $\theta = \frac{1}{2}$, & $\pi = \frac{1}{2}$, on aura $s = \theta - \pi = 0$, & $\frac{d}{3n \zeta} P^{\frac{1}{2}}$ sera la fluente de $d \zeta \zeta^{-\frac{1}{2}n-1} \times e + f \zeta^{\frac{1}{2}}$; & si $\theta = \frac{1}{2}$, $\pi = \frac{1}{2}$, elle sera $\frac{be + af \zeta^{\frac{1}{2}}}{1 \frac{1}{2} n \zeta \zeta^{\frac{1}{2}}} d P^{\frac{1}{2}}$.

Il y a des cas où la fluente de cette expression peut être trouvée plus commodément par les problèmes suivans.

PROBLEME XV.

51. Trouver la fluente de $d \zeta \zeta^m \times e + f \zeta^n$, lorsque π est un nombre positif plus grand que l'unité.

Soit $\zeta^{n-1} P^n \times$ par $(K + L P^{-1} + M P^{-2} + N P^{-3}) \dots xF$, la fluente cherchée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, & $\frac{m+1}{n} = \theta$ est $(rK + \frac{0-\pi}{r-1}, eK) \left\{ P^{-1} + \frac{1-\pi}{r-2}, eL \right\} P^{-2} + \frac{2-\pi}{r-3}, eM \left\{ P^{-3} \dots + \frac{3-\pi}{r-n}, eN P^{-n} \right\} \times$ par $n \zeta \zeta^{n-1} P^n$.

Car si $\zeta^{n-1} P^{s+\pi}$ exprime un terme quelconque de cette fluente, on trouvera que sa fluxion est, comme dans le problème précédent, $(n+s, P^s - s+\pi, e P^{s-1}) \times$ par $n \zeta \zeta^{n-1} P^n$; & en faisant successivement s égale à 0, 1, 2, &c. on aura les fluxions comme ci-dessus.

Ainsi $n r K = d$,

$$0 - \pi, e K + r - 1, L = 0, \text{ ou } K = \frac{d}{nr}.$$

$$1 - \pi, e L + r - 2, M = 0, \quad L = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{e d}{nr}.$$

$$2 - \pi, e M + r - 3, N = 0, \quad M = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{e e d}{nr}.$$

$$N = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{\pi-2}{r-3} \times \frac{e^2 d}{nr}.$$

Mais puisque $x = 3 - \pi$, $n \in N$, & $\dot{x} = \dot{x} \dot{x}^{n-1} P^{n-1}$, lorsque $N \dot{x}^{n-1} P^{n-1}$ est le dernier terme, on aura par la même raison $x = 1 + \pi$, en Q, & $\dot{x} = \dot{x} \dot{x}^{n-1} P^n$, lorsque $Q \dot{x}^{n-1} P^n$ est le dernier terme, en supposant que π exprime la moindre fraction de π ; par conséquent, $\frac{d}{nr} \dot{x}^{n-1} P^n + \frac{\pi}{r-1} \times \frac{e d}{nr} + \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{e e d}{nr} + \frac{\pi-2}{r-3} \times \frac{e e e d}{nr} + \dots + 1 + \pi$, en Q F, sera la fluente demandée.

COROLLAIRE I.

§ 2. De là il suit que si π est un nombre entier, & r une fraction, ou $r = 1$, un nombre entier plus grand que π , la fluente sera toujours finie & exprimée par autant de termes que $\pi + 1$ contient d'unités.

Si θ est positif, & $\pi = 1$, la fluente sera $\frac{d x^n}{nr} P + \frac{e d x^n}{r-1, nr}$.

Et si $\pi = 2$, elle sera $\frac{d x^n}{nr} P^2 + \frac{e d x^n}{r-1, nr} P + \frac{e e d x^n}{r-1, r-2, nr}$.

Lorsque θ, π , expriment des nombres entiers positifs, & que $\theta < \pi$, la fluente de cette fluxion sera mieux exprimée dans le quatorzième problème.

COROLLAIRE II.

§ 3. Lorsque θ est négatif, la fluxion $d \dot{x} \dot{x}^{n-1} \times e + f \dot{x}^{n-1}$, peut être changée en celle-ci, $d \dot{x} \dot{x}^{n-1} \times e \dot{x}^{n-1} + f \dot{x}^{n-1}$; & puisque $\frac{\pi-1}{n} = \theta - \pi$, en mettant $\theta - \pi$ au lieu de θ dans $\theta + \pi = r$, on aura $\theta = r$; & si l'on met e pour f , f pour e , $-n$ pour n , & $\dot{x}^{-n}$ pour $\dot{x}^n$, dans la dernière fluente, on aura

Nn ij

$$\frac{d}{\theta n} z^{\pi-\pi} P^{\pi} + \frac{\pi}{\theta-1} \times \frac{A f}{P} + \frac{\pi-1}{\theta-1} \times \frac{B f}{P} + \frac{\pi-1}{\theta-1} \times \frac{C f}{P} + \frac{\pi-3}{\theta-1} \times \frac{D f}{P} \dots - \frac{1}{1+\pi}, n f Q F.$$

Il faut se souvenir que $P = \frac{e+fz^n}{z^n}$ ici, & que la fluente doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi+1$.

C O R O L L A I R E I I I.

54. Par conséquent lorsque π est un nombre entier & positif, & θ une fraction, ou un nombre entier plus grand que π , la fluente sera toujours exprimée par $\pi+1$ termes.

C O R O L L A I R E I V.

55. Si $\pi=1$, & θ une fraction, ou plus grand que π , la fluente sera $\frac{dP}{\theta n z^{\theta-1}} - \frac{f d}{\theta-1, \theta n}$. Et si $\pi=2$, elle sera $\frac{d^2 P}{\theta n z^{\theta-2}} - \frac{2 f d}{\theta-1, \theta n} + \frac{f^2}{\theta-1, \theta-1, \theta-1}$.

C O R O L L A I R E V.

56. Si $\dot{x} \times \frac{1}{a a + x x^1}$ est la fluxion proposée, on aura $\dot{F} = \dot{x} \sqrt{a a + x x}$, & ainsi si $L = \log. \frac{x + \sqrt{a a + x x}}{a}$, on aura $F = \frac{x}{1} \sqrt{a a + x x} + \frac{a a}{1} L$; mais puisque $n=2$, $\pi=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{1}{2}$, $r=2$, $e=a a$, $x=z$, $f=d=1$, on aura $\frac{x}{2} \times \frac{1}{a a + x x^1} + \frac{1 a a x}{24} \times \frac{1}{a a + x x^1} - \frac{1 a^4 x}{16} \times \frac{1}{a a + x x^1} - \frac{1 a^6}{16} L$, pour la fluente cherchée, parce que $Q = \frac{1 a a}{24}$.

P R O B L E M E X V I.

57. Trouver la fluente de $d z \dot{z}^n \times \frac{1}{e+fz^n}$, lorsque π est plus grand que l'unité.

Soit $\dot{z}^n P^{\pi-n}$ par $(K P + L P^2 + M P^3 + N P^4) \dots \times F$, la fluente cherchée, dont la fluxion trouvée comme ci-devant,

& mise par ordre, en faisant $\theta - \pi = s$, sera $(\pi - 1, eK + \frac{s+1}{\pi-2}, eL) \left\{ P + \frac{s+2}{\pi-3}, eM \right\} P^2 + \frac{s+3}{\pi-4}, eN \left\{ P^3 + \frac{s+4}{\pi-5}, eO \right\} P^4 + \dots$ par $n \pm 1$ P^n . Ainsi

$$\begin{aligned} \pi-1, eK &= d, & ou + K &= \frac{1}{\pi-1} \times \frac{d}{ne} \\ \frac{s+1}{\pi-2}, eL &= 0, & -L &= \frac{1}{\pi-1} \times \frac{s+1}{\pi-2} \times \frac{d}{ne} \\ \frac{s+2}{\pi-3}, eM &= 0, & +M &= \frac{1}{\pi-1} \times \frac{s+1}{\pi-2} \times \frac{s+2}{\pi-3} \times \frac{d}{ne^2} \\ \frac{s+3}{\pi-4}, eN &= 0, & -N &= \frac{1}{\pi-1} \times \frac{s+1}{\pi-2} \times \frac{s+2}{\pi-3} \times \frac{s+3}{\pi-4} \times \frac{d}{ne^3} \end{aligned}$$

Par conséquent $\frac{dx^n}{\pi-1, ne} P^{1-\pi} - \frac{s+1}{\pi-2} \times \frac{A}{e} P - \frac{s+2}{\pi-3} \times \frac{B}{e^2} P - \frac{s+3}{\pi-4} \times \frac{C}{e^3} P - \frac{s+4}{\pi-5} \times \frac{D}{e^4} P - \dots - \theta - \pi, n QF$, sera la fluente cherchée, laquelle doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi - 1$, & $F = \frac{dx^n}{\pi-1} P^{1-\pi}$.

COROLLAIRE I.

§8. De là il suit, que si s , ou $\theta - \pi$ est un nombre entier & négatif, & π une fraction, ou un entier plus grand que s , la fluente sera toujours finie & exprimée par s termes.

Si $\theta = 1$, $\pi = 3$, on aura $s = -2$, & $\frac{dx^n}{3ne} P^{-1} + \frac{dx^n}{2ne^2} P^{-1}$ pour la fluente.

Soit $dx x^2 \times \frac{a}{a+xx} \times \frac{1}{x^2}$, la fluxion proposée, on aura $\theta = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\pi = \frac{7}{2}$, $s = -2$, $e = aa$, $f \frac{1}{x^2} = xx$, & $\frac{dx^n}{3ne} \times \frac{a}{a+xx} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3ne^2} \times \frac{a}{a+xx} \times \frac{1}{x^2}$.

Soit enfin $\frac{a^3 x}{aa+xx}$ la fluxion, on aura $n = 2$, $\pi = 4$, $\theta = \frac{1}{2}$, $s = \frac{7}{2}$, $d = a^3$, $e = aa$, & $F = \frac{a^3}{aa+xx}$. Donc si (1) exprime un arc de cercle dont le rayon est a , & la tangente x , on aura $F = \frac{1}{aa} (1)$, & la fluente cherchée sera $\frac{a^3 x}{6naa+xx} + \frac{1}{16na} \frac{1}{aa+xx} + \frac{1}{16na} (1)$, parce que $Q = \frac{1}{16na}$.

COROLLAIRE II.

59. Lorsque θ est négatif, la fluxion $d z \zeta^{-\pi-1} \times \frac{e+f\zeta^n}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$, peut être changée en celle-ci, $d z \zeta^{-\pi-1} \times \frac{e}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$, & comme $\frac{d\pi-\pi}{\pi} = \theta + \pi$, on aura $\theta - \pi = s = \theta$, & en mettant e pour f , f pour e , $\zeta^{-\pi}$ pour ζ^n , & $-\pi$ pour n dans la fluente ci-dessus, elle deviendra $\frac{d}{n f \zeta^{n+\pi}} P^{-\pi} \times \text{par} \left(\frac{P}{\pi-1} - \frac{\theta+1}{\pi-1} \times \frac{A}{f} P - \frac{\theta+1}{\pi-3} \times \frac{B}{f} P - \frac{\theta-3}{\pi-5} \times \frac{C}{f} P \right) \dots \theta + \pi + \pi, n Q F$.

Cette fluente doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi - 1$, & on a ici $P = \frac{e+f\zeta^n}{\zeta^n}$; il est clair que cette fluente ne peut être exprimée en un nombre fini de termes, & qu'elle dépend toujours de celle de F , puisqu'aucun des numérateurs ne peut devenir égal à zero.

Si $\frac{\zeta x^{-1}}{aa+xx}$, on aura $\theta = 0, \pi = 2, n = 2, e = aa, f\zeta^n = xx, P = \frac{aa+xx}{xx}$, & $F = \zeta \zeta^{-\pi-1} P$, ou $F = \frac{\zeta x^{-1}}{aa+xx} = \frac{\zeta x^{-1}}{aa} - \frac{\zeta x^{-1}}{aa+xx}$. Or si $L = \log. \frac{\sqrt{aa+xx}}{x}$, la fluente sera $\frac{-x^1}{2 \times aa+xx} + \frac{x^{-1}}{2aa} + \frac{1}{aa} L$.

COROLLAIRE GENERAL.

60. Si δ, π , expriment les moindres fractions de m & π , il est évident que la fluente de $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e+f\zeta^n}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$, peut toujours être réduite à celle de $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$; car, par le quatorzième problème, la fluente $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e+f\zeta^n}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$, peut être réduite à celle de $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e+f\zeta^n}{\zeta^{-\pi}}$, & cette dernière, par le 15, ou 16^{me}, à celle de $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e}{\zeta^{-\pi}}$; & par conséquent la fluente de cette dernière fluxion étant donnée, celle de la première le sera aussi.

Si $\frac{\delta}{n}$, ou $\frac{\delta-\pi\pi}{n}$, est un nombre entier & positif, la fluente de $d z \zeta^{\delta-1} \times \frac{e}{\zeta^{-\pi}+f\zeta^n}$, peut être exprimée par un nombre fini de

termes, par ce qui a été dit; mais si $\frac{\delta}{n}$, ou $\frac{\delta - n\pi}{n}$, est un nombre entier négatif, ou zero, elle dépendra de la quadrature des sections coniques; car en faisant $e + f\zeta^n = v$, la fluxion $d\zeta \zeta^{\delta-1} \times \frac{1}{e + f\zeta^n}$, peut être changée en celle-ci, $\frac{d\zeta v^{\frac{1}{n}}}{nf^{\frac{1}{n}}} \times$

$\frac{\frac{\delta}{n} - \frac{\delta - n\pi}{n} - 1}{f}$: or si $\frac{\delta}{n}$ est un nombre entier négatif, ou zero, cette fluxion deviendra une fraction dont le dénominateur est délivré du signe radical, & par conséquent la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

Si au contraire on suppose $\frac{e + f\zeta^n}{\zeta^n} = v$, la fluxion $d\zeta \zeta^{\delta-1} \times \frac{1}{e + f\zeta^n}$, peut être changée en celle-ci, $-\frac{1}{n} \zeta v^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\delta + n\pi}{n}} \times v^{-\frac{\delta + n\pi}{n}}$; & par conséquent si $\frac{\delta + n\pi}{n}$, est un nombre entier négatif, ou zero, cette fluxion deviendra une fraction délivrée du signe radical; & par conséquent la fluente peut être trouvée de la même manière que ci-devant.

PROBLEME XVII.

61. Trouver la fluente de $d\zeta \zeta^{\pm \theta - 1} \times \frac{1}{a^n + \zeta^{\pm \lambda}}$, lorsque θ , δ , λ , sont des nombres entiers quelconques.

Puisque $\frac{\pm \theta - 1 + 1}{n} = \pm \theta$, il est évident que si θ est positif, la fluente de cette fluxion peut être trouvée exactement par le quatorzième problème; & si θ est négatif, cette fluente peut être réduite à celle de $d\zeta \zeta^{-1} \times \frac{1}{a^n + \zeta^{\pm \lambda}}$. Or si l'on suppose $v = a \times \frac{a^{\frac{n}{\lambda}} + \zeta^{\frac{n}{\lambda}}}{\zeta^{\frac{n}{\lambda}}}$, on aura $v^\lambda a^n = a^{n+\lambda} + a^\lambda \zeta^n$, dont la fluxion est $\lambda a^n v^{\lambda-1} = n a^\lambda \zeta^{\frac{n}{\lambda}-1}$, le premier membre divisé par $n \times v^\lambda a^n - a^{n+\lambda}$, & le second par son égal $n a^\lambda \zeta^{\frac{n}{\lambda}}$, donnera $\frac{\lambda}{n} \times \frac{v^{\lambda-1}}{v^\lambda a^n - a^{n+\lambda}} = \zeta^{\frac{n}{\lambda}-1}$; & si l'on ajoute a^n de part & d'autre à $\frac{v^\lambda a^n - a^{n+\lambda}}{a^\lambda} = \zeta^n$, on aura $v^\lambda a^{n-\lambda} = a^n + \zeta^n$, ce qui étant élevé à la puissance $\pm \frac{\delta}{\lambda}$, donnera $v^{\pm \delta} a^{\pm \frac{\delta n}{\lambda} + \delta} = \frac{a^n + \zeta^n}{\zeta^{\pm \frac{\delta}{\lambda}}}$,

par conséquent la fluxion $d\dot{z} \dot{\gamma}^{-1} \times \overline{a^n + \dot{\gamma}^{n-1}}$, deviendra $\frac{\lambda d}{n}$
 $\times a^{\pm \frac{\lambda}{n}} \pm \dot{\gamma} \times \frac{\dot{\gamma}^{n-1} \pm \dot{\gamma}^{-1}}{n \dot{\gamma}^n - a^{\pm \frac{\lambda}{n}}}$.

Fig. 7.

Ot si la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = a$, est divisée en λ parties égales aux points B, C, D, E, &c. & si l'on prend les arcs ABb , ACc , ADd , &c. enforte qu'ils soient aux arcs AB , AC , AD , &c. comme $\lambda - d$ est à l'unité; & si l'on prend $OP = v$, en tirant les lignes du point P & du centre O aux points B, C, D, E, &c. aussi bien que les sinus b_1 , c_2 , d_3 , e_4 , &c. en faisant $\theta + \frac{d}{\lambda} = s$, la fluente de

$d\dot{z} \dot{\gamma}^{-n-1} \times \overline{a^n + \dot{\gamma}^{n-1}}$, fera

$$\frac{-d^{n-1} \dot{\gamma}^{-\frac{\lambda}{n}}}{\dot{\gamma}^n} \times \text{par } \left\{ \frac{1}{\dot{\gamma}} \times \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} A \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} \left\{ \begin{array}{l} -AO (AP:PO) \\ +O_2(PC:CO) - C_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + e_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\} \right.$$

$$\left. B \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} C \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} D \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} \right) - \dots + \frac{1-d}{\lambda} Q a^{-\frac{\lambda}{n}-1}.$$

Et la fluente de $d\dot{z} \dot{\gamma}^{-n-1} \times \overline{\dot{\gamma}^n - a^n}$, fera

$$\frac{d\dot{\gamma}^{-n}}{n} P^{1-\lambda} \times \text{par } \left(\frac{1}{\dot{\gamma}} \times \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} A \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} \right) \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array} \right.$$

$$- \frac{1-n}{1} B \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} C \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} - \frac{1-n}{1} D \frac{\dot{\gamma}^{-n}}{a} \right) - \dots - \frac{1-d}{\lambda} Q a^{-\frac{\lambda}{n}-1}$$

Il faut se souvenir que Q exprime toujours le coefficient du dernier terme avec un signe contraire.

En mettant la même construction, excepté que les arcs ABb , ACc , ADd , &c. soient aux arcs AB , AC , AD , &c. comme d est à l'unité, & en faisant $s = \theta - \frac{d}{\lambda}$, la fluente de

$d\dot{z} \dot{\gamma}^{-n-1} \times \overline{\dot{\gamma}^n - a^n}$, fera

$$\frac{-1}{n\lambda} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{1}{\delta} \times \frac{z^{-n}}{a} - \frac{1-1}{\delta-1} A \frac{z^{-1n}}{a} - \left\{ \begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O_2(PC:CO) - c_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + c_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\} \right.$$

$$+ \frac{\lambda}{\delta} Q R^{\frac{\delta}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} Q a^{\frac{\delta}{\lambda}-1}$$

Et la fluente de $d z \frac{z^{-n-1}}{a} \times \frac{z^{-n}}{a^{\frac{\delta}{\lambda}}}$

sera $\frac{d}{n\lambda} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{1}{\delta} \times \frac{z^{-n}}{a} - \frac{1-1}{\delta-1} A \frac{z^{-1n}}{a} - \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array} \right\} \right.$

$$- \frac{1-1}{\delta-1} B \frac{z^{-1n}}{a} - \frac{1-3}{\delta-3} C \frac{z^{-3n}}{a} - \frac{1-4}{\delta-4} D \frac{z^{-4n}}{a} - \dots - \frac{\lambda}{\delta} Q R^{\frac{\delta}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} Q a^{\frac{\delta}{\lambda}-1}$$

Notez que $R = \frac{z^{\pm n}}{a^{\pm n}}$, $P = z^n \pm a^n$.

PROBLEME XVIII.

62. Trouver la fluente de $d z \frac{z^{\pm n} \pm a^{\pm n-1}}{a^n + z^{n \pm \lambda}} \times \frac{z^{\pm n}}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, lorsque θ , λ , δ , sont des nombres entiers quelconques.

Lorsque θ est négatif, la fluente de cette fluxion peut être trouvée exactement par le quatorzième problème, & lorsque

θ est positif, elle peut être réduite à la fluente de $d z \frac{z^{\pm n-1}}{a^n + z^{n \pm \lambda}} \times \frac{z^{\pm n}}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, par le second cas du même problème.

Par conséquent si l'on fait $v = a \times \frac{a^{\pm n} \pm z^{\pm 1}}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, cette fluxion peut être changée en cette autre $\frac{-\lambda}{n} d a^{-\delta} v^{\delta-1} - \frac{\lambda}{n} d \times \frac{a^{1-\delta} \pm v^{\delta-1}}{v^{\lambda} - a^{\lambda}}$, lorsque $+$ $\frac{\delta}{\lambda}$, & en $\frac{-\lambda}{n} d a^{\delta} \times \frac{v^{\lambda-\delta-1}}{v^{\lambda} - a^{\lambda}}$, lorsque $-$ $\frac{\delta}{\lambda}$.

En mettant la même construction qu'au dernier problème, & Fig. 7. faisant $OP = a \times \frac{a^{\pm n} \pm z^{\pm 1}}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, la fluente de $d z \frac{z^{(n-1) \pm \frac{\delta}{\lambda} n-1}}{a^n + z^{n \pm \lambda}} \times \frac{z^{\pm n}}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$ fera

$$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} A \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} B \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} C \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} D \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \right) \dots \left\{ \begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O_2(PC:CO) - c_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + e_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{\lambda a} Q a^n$$

Et la fluente de $dz \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \times \frac{1}{a^n + z^{\frac{\delta}{\lambda}}}$ sera

$$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} A \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} B \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} C \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} D \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \right) \dots \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{\lambda a} Q a^n.$$

La fluente de $dz \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \times \frac{1}{a^n + z^{\frac{\delta}{\lambda}}}$ sera

$$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} A \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} B \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} C \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} - \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} D \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \right) \dots \text{dan} QR \left\{ \begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O_2(PC:CO) - c_2(PCO) \\ +O_4(PE:EO) + e_4(PEO) \\ -O_6(PG:GO) + g_6(PGO) \end{array} \right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda a} Q a^n.$$

Et la fluente de $dz \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \times \frac{1}{a^n + z^{\frac{\delta}{\lambda}}}$ sera

$$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} A \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} B \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} C \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{1-\frac{\delta}{\lambda}}{1-\frac{\delta}{\lambda}} D \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} \right) \dots \left\{ \begin{array}{l} +O_1(PB:BO) + b_1(PBO) \\ -O_3(PD:DO) + d_3(PDO) \\ -O_5(PF:FO) - f_5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array} \right\}$$

$$d a^n Q R + \frac{1}{\lambda a} Q a^n$$

Notez que $R = \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{a^n + z^{\frac{\delta}{\lambda}}}$, & $P = z^{\frac{\delta}{\lambda}} \pm a^n$.

PROBLEME XIX.

63 Soit $P = e + f z^{\frac{\delta}{\lambda}} + g z^{\frac{\delta}{\lambda}}$, l'on demande la fluente de $dz \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{\frac{\delta}{\lambda}}} P^n$, lorsqu'elle peut se réduire à la quadrature des sections coniques.

Soit $P^{x+1} \times$ par $(K \bar{z}^{n-1n} + L \bar{z}^{n-1n} + M \bar{z}^{n-1n} + N \bar{z}^{n-1n}) \dots \times F$ la fluente demandée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, & $\theta + 2\pi = s$, sera

$$\left(s g K + \frac{s-1}{r-1} g L \right) \bar{z}^{-n} + \frac{s-2}{r-2} g M \left\{ \bar{z}^{-1n} + \frac{s-3}{r-3} g N \right\} \\ \left(\bar{z}^{-1n} + \frac{s-4}{r-4} g N \right) \bar{z}^{-4n} + \frac{s-5}{r-5} e N \bar{z}^{-5n} \times \text{par } n \bar{z}^{n-1} P^x.$$

Car soit $\bar{z}^{n-1n} P^{x+1}$, un terme quelconque de cette fluente, on trouvera de la même manière que ci-devant, que sa fluxion est $(\theta-1, e \bar{z}^{-1n} + r-1+1, f \bar{z}^{n-1n} + s-1+2, g \bar{z}^{n-1n}) \times \text{par } n \bar{z}^{n-1} P^x$; en faisant successivement θ , égale à 2, 3, 4, 5, &c. on aura les fluxions des termes comme ci-dessus. Donc

$$s g K = d, \quad \text{ou } K = \frac{d}{s g} \\ s-1, g L + r-1, f K = 0 \quad - L = \frac{r-1}{s-1} \times \frac{f K}{g} \\ s-2, g M + r-2, f L + \theta-2, e K = 0 \quad - M = \frac{r-2}{s-2} \times \frac{f L}{g} + \frac{\theta-2}{s-2} \times \frac{e K}{g} \\ s-3, g N + r-3, f M + \theta-3, e L = 0 \quad - N = \frac{r-3}{s-3} \times \frac{f M}{g} + \frac{\theta-3}{s-3} \times \frac{e L}{g}.$$

Mais lorsque $\theta = 5$, on a $\bar{z}^{-5n}, e N \bar{z}^{-5n} = 0$, $1+\pi, n f N + n e M = x$, & $\bar{z} = \bar{z}^{n-1} P^x$; & par la même raison, lorsque θ est tout au nombre entier, on aura toujours la même chose; par conséquent la fluente demandée sera $\frac{dx^{1n}}{n g \bar{z}^{1n}} P^{x+1} -$

$$\frac{r-1}{s-1} \times \frac{f A}{g \bar{z}^2} - \frac{r-2}{s-2} \times \frac{f B}{g \bar{z}^3} - \frac{\theta-1}{s-1} \times \frac{e A}{g \bar{z}^{1n}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{f C}{g \bar{z}^2} - \frac{\theta-3}{s-3} \times \frac{e B}{g \bar{z}^{1n}} \dots$$

$$1 + \pi, n f N + n e M, F.$$

Cette fluente doit être continuée à $\theta - 1$ termes; les lettres A, B, C, expriment chacune le terme qui la précède avec son signe; & M, N, les coefficients des deux derniers termes avec des signes contraires; mais lorsque $\theta = 2$, alors M sera $= 0$; & il faut remarquer que les termes sont distingués par des lignes tirées par-dessus.

C O R O L L A I R E I.

64. Lorsque $\pi = -\frac{1}{2}$, on aura $r = \theta - \frac{1}{2}$, & $s = \theta - 1$;
& en faisant $v = \frac{f}{zg} + \frac{1}{z^n}$, & $a = \frac{4zg - ff}{4g}$; la fluxion $z\dot{z}^{n-1}$

$P^{-\frac{1}{2}}$, de F, peut être changée en celle-ci $\frac{\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{aa+gvv}}$; c'est pour-

quoi si $R = \sqrt{g}$, $T = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{aa+gvv}}$, & $S = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{aa+gvv}}$, on aura

Art. 35. $F = \frac{T}{ng}(1)$, * c'est-à-dire (1) sera le logarithme de $\frac{R+T}{S}$ multiplié

par R, lorsque R, ou $\sqrt{g}$ est possible, ou un arc de cercle dont le rayon est R ; la tangente T est la sécante S, lorsque R, ou $\sqrt{g}$ est impossible ; mais dans ce cas on prend $R = \sqrt{g}$, possible, comme on a fait voir dans l'article 35. Ainsi la fluente de

$d\dot{z}z^{n-1}P^{-\frac{1}{2}}$, sera $\frac{d\dot{z}z^{n-1}n}{i-1, ng}P^{\frac{1}{2}} - \frac{2i-1}{i-1} \times \frac{fA}{zg} - \frac{2\theta-1}{i-1} \times \frac{fB}{zg}$

$- \frac{i-1}{i-3} \times \frac{eA}{zg} - \frac{2i-2}{i-4} \times \frac{fC}{zg} - \frac{i-1}{i-4} \times \frac{eB}{zg} \dots \frac{fN+2eM}{2g} F$; ce

qui donne $\frac{dP^{\frac{1}{2}}}{ng} - \frac{f}{2ngg}(1)$, lorsque $\theta = 2$, parce que $M = 0$,

$N = \frac{d}{ng}$; & $\frac{2zg-1f}{4ngg}dP^{\frac{1}{2}} + \frac{3ff-4eg}{8ngg}d(1)$, lorsque $\theta = 3$,

parce que $M = \frac{d}{2ng}$, $N = -\frac{3fd}{4ngg}$.

Mais si $\theta = 4$, on aura $\frac{21ff-16eg-10fe+2ggz^{12}}{24ngg}dP^{\frac{1}{2}} +$
 $\frac{22efg-1f^3}{16ngg}d(1)$, parce que $-M = \frac{10fd}{24ngg}$, & $-N =$
 $\frac{26eg-11ff}{24ngg}d$.

C O R O L L A I R E II.

65. Si θ est négatif, la fluxion $d\dot{z}z^{-n-1} \times \frac{e+fg^n+gz^n}{e+fg^n+gz^n}$ peut être changée en celle-ci, $d\dot{z}z^{-n-1} \times \frac{ez^{-n}+fz^{-n}+gz^{-n}}{e+fg^n+gz^n}$. Or comme $\frac{-n-1}{-n} = \theta + 1$; en mettant $\theta + 1$ pour θ , $-n$ pour n , e pour g , g pour e , & z^{-n} pour z^n , dans la for-

mule générale, elle deviendra $\frac{dz^{n-1}}{n dz} P^{\frac{1}{n}} - \frac{z^{n-1}}{n-1} \times \frac{fA}{z^n} z^n -$
 $\frac{z^{n-3}}{n-3} \times \frac{fB}{z^n} z^n - \frac{z^{n-1}}{n-1} \times \frac{gA}{z^n} z^n - \frac{z^{n-1}}{n-3} \times \frac{fC}{z^n} z^n - \frac{z^{n-1}}{n-3} \times \frac{gB}{z^n} z^n - \dots$
 $\frac{fN + z M}{z^n} F.$

Cette fluente doit être continuée à θ termes ; & si $v =$
 $\frac{ze + fz^2}{z^2 e^2}, r = \sqrt{e}, z = \frac{ev}{\sqrt{ae + evv}}, s = \frac{a\sqrt{e}}{\sqrt{ae + evv}}, aa = \frac{4eg - ff}{4e},$
 $P = \frac{e + fz + g^2}{z^2},$ & $F = \frac{1}{e}(1)$; en supposant (1), le logarith-
 me de $\frac{r+z}{s}$, multiplié par r , lorsque r , ou $\sqrt{e}$ est une quantité
 possible, ou un arc de cercle, dont le rayon est r , la tangente z ,
 & secante lorsque r est impossible ; c'est-à-dire lorsque $r =$
 $\sqrt{-e}$. Mais si $\theta = 1$, on aura $M = 0$.

De là il suit que si $\theta = 1$, on aura $\frac{dz}{z} P^{\frac{1}{n}} + \frac{f}{2ne} d(2)$, pour
 la fluente de $dz z^{n-1} P^{\frac{1}{n}}$, parce que $M = 0$, & $-N = \frac{d}{n e}$.

Si $\theta = 2$, on aura $\frac{2e + 3fz^2}{4neez} d P^{\frac{1}{n}} + \frac{4eg - 3ff}{8ne^2} d(1)$, pour la
 fluente de $dz z^{n-1} P^{\frac{1}{n}}$, parce que $-M = \frac{2ed}{4nee}$, & $N =$
 $\frac{3fd}{4nee}$.

COROLLAIRE III.

66. Si $\pi = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{z^2 + 1}{z} = r$, & $\theta + 1 = s$: & la fluente
 de $dz z^{n-1} \times \sqrt{e + fz^n + g^2 z^{2n}}$ sera $\frac{dz^{n-1}}{n dz} P^{\frac{1}{n}} - \frac{z^{n-1}}{n-1} \times \frac{fA}{z^{2n}} -$
 $\frac{z^{n-3}}{n-3} \times \frac{fB}{z^{2n}} - \frac{z^{n-1}}{n-1} \times \frac{gA}{z^{2n}} - \frac{z^{n-1}}{n-3} \times \frac{fC}{z^{2n}} - \frac{z^{n-1}}{n-3} \times \frac{gB}{z^{2n}} - \dots$
 $\frac{fN + z M}{z^n}, n F.$

En supposant les mêmes valeurs de v, a, R, S, T , que dans
 l'article 64, on aura $\frac{v}{n} \sqrt{aa + gvv}$, pour la fluxion de F ; & par

conséquent $F = \frac{f + z g^2}{4g} P^{\frac{1}{n}} + \frac{aa}{z^2} (1).$

Cette fluente doit être continuée à $\theta - 1$, termes ; & lorsque
 θ est 1, ou 2, M sera $= 0$.

Si $\theta = 2$, on aura $\frac{2e - 1ff + 1fz^n + 2gz^n}{24n^2g} dP\frac{1}{2} + \frac{f' - 4efg}{16ng^2}$
 $d(1)$, parce que $M = 0$, & $N = \frac{d}{3ng}$, pour la fluente de
 $d\dot{z} z^{1n-1} \sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}$.

COROLLAIRE IV.

67. Lorsque θ est négatif, la fluxion $d\dot{z} z^{-1n-1} \sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}$
 peut être changée en celle-ci, $d\dot{z} z^{n-1n-1} \sqrt{ez^{1n} + f\dot{z}^{-n} + g}$,
 & comme $\frac{n-1n}{-n} = \theta - 1$; en mettant $\theta - 1$, pour θ ,
 $-n$ pour n , e pour g , g pour e , & $\dot{z}^{-n}$ pour $\dot{z}^n$, dans la for-
 mule générale ci-dessus, on aura $\frac{d\dot{z} z^{1n-1n}}{-1n} P\frac{1}{2} - \frac{1e-1}{1-1} \times \frac{fA}{1e} \dot{z}^n -$
 $\frac{2e-1}{1-1} \times \frac{fB}{1e} \dot{z}^n - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gA}{e} \dot{z}^{2n} - \frac{2e-1}{1-1} \times \frac{fC}{1e} \dot{z}^n - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gB}{e} \dot{z}^{2n} -$
 $\frac{1}{2} fN - gM, F.$

Cette fluente doit être continuée à $\theta - 2$ termes, & lors-
 que $\theta = 3$, on aura $M = 0$; en retenant les mêmes valeurs
 de $\nu, a, r, s, t, (2)$, que dans l'article 66, on aura $F =$
 $\frac{2e + fz^n}{4ez^n} P\frac{1}{2} + \frac{ff - 4eg}{8eg} (2)$; par conséquent la fluente de $d\dot{z} z^{-1n-1}$
 $\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}$, sera $\frac{2e-1efz^n - 2egz^{2n} + 3ffz^{2n}}{24neez^{1n}} dP\frac{1}{2} +$
 $\frac{4efg - f^2}{16ne^2} d(2)$, parce que $M = 0$, & $N = \frac{d}{3ne}$.

COROLLAIRE V.

68. Si $\theta = 0$, la fluxion $d\dot{z} z^{-1} \sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}$, peut
 être changée en celle-ci, $\frac{d\dot{z} z^{-1}}{\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}} + \frac{2df\dot{z} z^{-1n-1} + dg\dot{z} z^{1n-1}}{\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}}$,
 ou bien en cette autre $\frac{ed\dot{z} z^{-1n-1}}{\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}} + \frac{fd\dot{z} z^{n-1}}{\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}} +$
 $\frac{2dfz^{n-1} + dg\dot{z} z^{1n-1}}{\sqrt{e + f\dot{z}^n + g\dot{z}^{2n}}}$; la fluente de ce dernier terme sera $\frac{d}{n} P\frac{1}{2}$; &
 retenant les mêmes valeurs de $\nu, a, R, S, T, r, s, t, (1), (2)$,
 que dans les articles 64, 65; la fluente du second terme sera
 $\frac{f^d}{eg} (1)$, & celle du premier $\frac{d}{n} (2)$: donc $\frac{d}{n} P\frac{1}{2} + \frac{f^d}{eg} (1) - \frac{d}{n} (2)$, sera
 la fluente cherchée.

Mais si $\theta = -1$, la fluxion $d\dot{z} \dot{z}^{-n-1} \sqrt{e+f\dot{z}^n+g\dot{z}^{2n}}$, peut être changée en celle-ci, $d\dot{z} \dot{z}^{-1} \sqrt{e\dot{z}^{-2n}+f\dot{z}^{-n}+g}$, laquelle étant la même que celle ci-dessus, seulement ici, $e, g, -n, \dot{z}^{-n}$, sont là, $g, e, n, \dot{z}^n$; par conséquent $\frac{1}{n+1} d P^{\frac{1}{2}} - \frac{df}{n+1} (1) + \frac{d}{n+1} (2)$.

On doit remarquer que lorsque $\pi = -\frac{1}{2}$, la fluente également distante de $\theta = 1$, & de $\theta = 0$, sont de même, seulement $e, g, n, \dot{z}^n$, de l'une, sont exprimées par $g, e, -n, \dot{z}^{-n}$ dans l'autre; & lorsque $\pi = \frac{1}{2}$, les fluentes également distantes de $\theta = 0$, & de $\theta = -1$, sont aussi de même, avec la même exception.

PROBLEME XX.

69. Soit $P = e + f\dot{z}^n$, $Q = g + h\dot{z}^n$, l'on demande la fluente de $d\dot{z} \dot{z}^{n-1} P^a Q^b$, lorsqu'elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques.

Soit $d P^{a+1} Q^{b+1} \times$ par $(K \dot{z}^{n-n} + L \dot{z}^{n-n} + M \dot{z}^{n-n} + N \dot{z}^{n-n})$ --- $x F + y G$, la fluente demandée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, $\theta + \pi$

$$= s, \text{ \& } \theta + \pi + \pi = t, \text{ sera } t f h K + \frac{r-1}{s-1} f g K \left\{ \begin{array}{l} \frac{r-1}{s-1} f g K \\ \frac{r-1}{s-1} e h K \end{array} \right\}$$

$$\dot{z}^{-n} + \frac{\theta-2}{r-2} e g K \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta-2}{r-2} e g K \\ \frac{\theta-2}{r-2} f g L \\ \frac{\theta-2}{r-2} e h L \\ \frac{\theta-2}{r-2} f h M \end{array} \right\} \dot{z}^{-2n} + \frac{\theta-3}{r-3} e g L \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta-3}{r-3} e g L \\ \frac{\theta-3}{r-3} f g M \\ \frac{\theta-3}{r-3} e h M \\ \frac{\theta-3}{r-3} f h N \end{array} \right\} \dot{z}^{-3n} +$$

$$\frac{\theta-4}{r-4} e g M \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta-4}{r-4} e g M \\ \frac{\theta-4}{r-4} f g N \\ \frac{\theta-4}{r-4} e h N \end{array} \right\} \dot{z}^{-4n} - \frac{\theta-5}{r-5} e g N \dot{z}^{-5n} \times \text{par } n d \dot{z} \dot{z}^{n-1} P^a Q^b.$$

Ainsi $efhK = 1$,

$$\frac{r-1}{\theta-1}, fgK + \frac{s-1}{\theta-1}, ehK + \frac{t-1}{\theta-1}, fhL = 0.$$

$$\frac{\theta-2}{\theta-2}, egK + \frac{r-2}{\theta-2}, fgL + \frac{s-2}{\theta-2}, ehL + \frac{t-2}{\theta-2}, fhM = 0.$$

$$\frac{\theta-3}{\theta-3}, egL + \frac{r-3}{\theta-3}, fgM + \frac{s-3}{\theta-3}, ehM + \frac{t-3}{\theta-3}, fhN = 0.$$

$$\frac{\theta-4}{\theta-4}, egM + \frac{r-4}{\theta-4}, fgN + \frac{s-4}{\theta-4}, ehN = x.$$

$$\frac{\theta-5}{\theta-5}, egN = y.$$

$$\text{ou } \begin{cases} +K = \frac{1}{efh} \\ -L = \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{gK}{fb} + \frac{s-1}{\theta-1} \times \frac{eK}{f} \\ -M = \frac{t-2}{\theta-2} \times \frac{egK}{fb} + \frac{r-2}{\theta-2} \times \frac{gL}{b} + \frac{s-2}{\theta-2} \times \frac{eL}{f} \\ -N = \frac{t-3}{\theta-3} \times \frac{egL}{fb} + \frac{r-3}{\theta-3} \times \frac{gM}{b} + \frac{s-3}{\theta-3} \times \frac{eM}{f} \end{cases}$$

Or si q exprime la moindre fraction de θ , ou $q = 0$, lorsque θ est un nombre entier, on aura $\theta - 5 = q$, $\theta - 4 = q + 1$, $r - 4 (\theta + \pi - 4) = \pi + q + 1$, & $s - 4 (\theta + \pi - 4) = \pi + q + 1$; & prenant N & M , pour les coefficients des deux derniers termes, on aura $-y = egqN$, & $-x =$

$$q + 1, egM + \pi + q + 1, fgN + \pi + q + 1, ehN; \text{ par conséquent la fluente sera } \frac{dx}{efbz^{\pi+1}} P^{\pi+1} Q^{\pi+1} \times \text{par } \left(\frac{1}{f} - \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{gA}{bz^{\pi}} - \frac{s-1}{\theta-1} \times \frac{eA}{fz^{\pi}} - \frac{t-2}{\theta-2} \times \frac{egA}{fbz^{\pi+1}} - \frac{r-2}{\theta-2} \times \frac{gL}{bz^{\pi}} - \frac{s-2}{\theta-2} \times \frac{eL}{fz^{\pi}} - \frac{t-3}{\theta-3} \times \frac{egB}{fbz^{\pi+2}} - \frac{r-3}{\theta-3} \times \frac{gC}{bz^{\pi+1}} - \frac{s-3}{\theta-3} \times \frac{eC}{fz^{\pi+1}} \right) - \dots - q + 1, egM + \pi + q + 1, fgN + \pi + q + 1, ehN \} NF - egqNG.$$

Remarquez que cette fluente doit être continuée à $\theta - 1$ termes; les lettres A , B , C , expriment chacune le terme qui la précède avec son signe; les termes sont distingués avec une ligne par-dessus; lorsque $\theta = 1$, alors M sera $= 0$; & enfin $P = z^{\pi+q-1} P^{\pi} Q^{\pi}$, & $G = z^{\pi-1} P^{\pi} Q^{\pi}$.

CAS I.

70. Si θ est un nombre entier, & $\pi = -1$, on aura $q = 0$, $\theta \pm \pi = r$, $\theta - 1 = s$, & $\theta \pm \pi - 1 = t$; par conséquent la fluente de $d z \zeta^{n-1} \times \frac{e + f \zeta^{\pm \pi}}{g + h \zeta^{\pm \pi}}$, sera $\frac{d z^n}{n f h \zeta^n} P^{\pm \pi} \times$ par $\left(\frac{1}{f} - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{g A}{h \zeta^n} - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{e A}{f \zeta^n} - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{e g A}{f h \zeta^n} - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{g B}{h \zeta^n} - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{e B}{f \zeta^n} - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{e g B}{f h \zeta^n} - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{g C}{h \zeta^n} - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{e C}{f \zeta^n} \right) - e g M - 1 \pm \pi, f g N \times F$.

Si l'on suppose $\pi = \frac{\delta}{\lambda}$, & $v = \frac{e + f \zeta^{n \lambda}}{g + h \zeta^{n \lambda}}$; $h a^\lambda = f g - e h$,

la fluxion de F , & $\zeta \zeta^{n-1} \times \frac{e + f \zeta^{\pm \pi}}{g + h \zeta^{\pm \pi}}$, peut être changée en $\frac{\lambda}{n h} \times \frac{v^{n \lambda - 1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsque $-\frac{\delta}{\lambda}$, ou en $\frac{\lambda}{n h} \times \frac{v^{n \lambda - 1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsqu'il y a $+\frac{\delta}{\lambda}$, la fluente de l'un ou l'autre cas a été trouvée dans l'article 58.

CAS II.

71. Si θ est négatif, & le reste comme auparavant, la fluxion $d z \zeta^{-(n-1)} \times \frac{e + f \zeta^{\pm \pi}}{g + h \zeta^{\pm \pi}}$ peut être changée en celle-ci,

$d z \zeta^{-(n-1) \pm \pi n - n - 1} \times \frac{e \zeta^{n-1} + f \zeta^{\pm \pi}}{g \zeta^{n-1} + h}$, & comme $\frac{-(n-1) \pm \pi n - n}{-n} = \theta \mp$

$\pi + 1$, on aura $\theta \mp \pi = s$, $\theta + 1 = r$, $\theta = t$, en mettant $s + 1$, $\theta + 1$, θ , e , f , g , h , $-n$, ζ^{-n} , au lieu de θ , r , t , s , f , e , h , g , n , ζ^n , dans la formule générale du problème, on aura

la fluente cherchée $\frac{d z^{n-m}}{n e g} P^{\pm \pi} \times$ par $\left(\frac{1}{f} - \frac{\theta}{f-1} \times \frac{h A}{g} \zeta^n - \frac{r-1}{f-1} \right.$

$\times \frac{f A}{e} \zeta^n - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{f h A}{g} \zeta^n - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{h B}{g} \zeta^n - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{f B}{e} \zeta^n - \frac{t-1}{f-1}$

$\times \frac{f h B}{e g} \zeta^n - \frac{t-1}{f-1} \times \frac{h C}{g} \zeta^n - \frac{r-1}{f-1} \times \frac{f C}{e} \zeta^n \Big) - e g M - 1 \pm \pi, f h M +$

$\frac{2 \mp \pi, e h}{1 \mp \pi, f g} \Big\} N F \pm 1 \mp \pi, f h N G.$

Pp

Cette suite doit être continuée à θ termes, & $P = \frac{e+fz^n}{z^n}$; mais lorsque $\theta = 1$, on a $M = 0$.

Si $v = e + f\zeta^{\frac{1}{n}}$, & $h a^{\lambda} = fg - e h$, en supposant $\pi = \frac{\delta}{\lambda}$, la fluxion $d\zeta^{-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ de G , peut être changée en $\frac{\lambda}{nb} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}} \times \frac{f}{v^{\lambda}-e}$; ce qui donne $\frac{\lambda e}{ng} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{v^{\lambda}-e} + \frac{\lambda a^{\lambda}}{ng} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}}$, lorsque $+$ $\frac{\delta}{\lambda}$, ou $\frac{\lambda}{ng} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{v^{\lambda}-e} - \frac{\lambda b}{ng} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}}$, lorsqu'il y a $-\frac{\delta}{\lambda}$.

Et la fluxion $d\zeta^{-n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ de F , sera changée en $\frac{\lambda h}{ng} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}} - \frac{\lambda e h + f g}{n e g} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{v^{\lambda}-e} - \frac{f}{n e g} \times \text{flux.} \frac{v^{\lambda}-e}{v^{\lambda}-e}$, s'il y a $-\frac{\delta}{\lambda}$, ou en $-\frac{f}{ng} \times \text{flux.} \frac{v^{\lambda}-e}{v^{\lambda}-e} - \frac{\lambda e h - f g}{n e g} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{v^{\lambda}-e} - \frac{\lambda h a^{\lambda}}{n e g} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}}$, s'il y a $+\frac{\delta}{\lambda}$, dont les fluentes peuvent être trouvées par ce qui précède.

C A S I I I.

72. Si θ est un nombre entier positif quelconque, $\pi = -\frac{1}{2}$, $\pi = -1$; en mettant $-\frac{1}{2}$ au lieu de π , dans la fluente du premier cas, elle donnera $\frac{d\zeta^{1-2\pi-1}}{n f h} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{1-2\pi-3} - \frac{1-2\pi-3}{1-2\pi-5} \times \frac{g A}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-2\pi-5}{1-2\pi-7} \times \frac{e A}{f z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-2\pi-7}{1-2\pi-9} \times \frac{g B}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-2\pi-9}{1-2\pi-11} \times \frac{e B}{f z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-2\pi-11}{1-2\pi-13} \times \frac{g C}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-2\pi-13}{1-2\pi-15} \times \frac{e C}{f z^{\frac{1}{n}}} \right) - \dots - e g M - \frac{1}{2} f N$, F .

La fluxion de F sera ici $= \frac{\lambda}{nb} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{a^{\lambda}+v^{\lambda}}$, selon ce même cas; or si $R = a = \sqrt{\frac{e h - f g}{h}}$, $T = \sqrt{e + f \zeta^{\frac{1}{n}}}$, $S = \sqrt{\frac{f g + e h}{h}}$, on aura $F = \frac{1}{n} \times \frac{g}{a a h} (1)$. De là il suit que la fluente de $d\zeta^{1-2\pi-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$, fera $\frac{\lambda}{n f h} dT + \frac{2 g d}{n a a h b} (1)$, parce que $M = 0$, & $N = \frac{1}{n f h}$.

de $d\dot{z} \dot{\gamma}^{1n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}$, fera $\frac{1eb-efg+2fhz^{\frac{1}{2}}}{3nfhb} dT + \frac{1g}{nbb} d(1)$,
 parce que $M=0$, & $N=\frac{1d}{3fb}$.

C A S V I.

75. La fluxion $d\dot{z} \dot{\gamma}^{1n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}$, peut être changée en celle-ci $d\dot{z} \dot{\gamma}^{1n-1n-1} \times \frac{e+z^{\frac{1}{2}}+f^{\frac{1}{2}}}{g+z^{\frac{1}{2}}+b}$, dont la fluente par le second cas fera $\frac{d\dot{z}^{1n-1n}}{nfg} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1-1} \times \frac{bA}{g} \dot{\gamma}^n - \frac{1b-1}{1-1} \times \frac{fA}{1e} \dot{\gamma}^n - \frac{1b-1}{1-1} \times \frac{fB}{1e} \dot{\gamma}^n - \frac{1b-1}{1-1} \times \frac{fB}{1e} \dot{\gamma}^n - \frac{1b-1}{1-1} \times \frac{fB}{1e} \dot{\gamma}^n\right) - \dots - \frac{1}{1} f h M + \frac{1}{1} f g N \times F + \frac{1}{1} f h N G$.

La fluxion de G, fera $= \frac{1e}{ng} \times \frac{1}{v-v-e} + \frac{1}{ng} \times \frac{aav}{aav+vv}$, & celle de F, fera = flux. $\frac{-fv}{ng, v-v-e} - \frac{1eb-fg}{ngg} \times \frac{1}{v-v-e} - \frac{1b}{ngg} \times \frac{aav}{aav+vv}$.
 Donc $G = \frac{1}{ng} (1) - \frac{1}{ng} (1)$, & $F = \frac{-1}{ngz^{\frac{1}{2}}} T - \frac{1b}{ngg} (1) + \frac{1eb-fg}{nfgg} (1)$.

C A S V I I.

76. Si au lieu de θ l'on suppose $\theta \mp \frac{1}{\lambda}$, & $\pi = \frac{1}{\lambda}$, $\pi = -1$; la fluxion du probleme fera $d\dot{z} \dot{\gamma}^{1n \mp \frac{1}{\lambda}-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}$, & en faisant $r = \theta$, $s = \theta \mp \frac{1}{\lambda} - 1$, $t = \theta - 1$, la fluente sera $\frac{d\dot{z}^{1n \mp \frac{1}{\lambda}}}{nfhz^{1n}} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{1-1} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gA}{bz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{fA}{fz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gA}{fhz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gB}{bz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{fB}{fz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{gB}{fhz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{fC}{fz^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-1}{1-1} \times \frac{fC}{fz^{\frac{1}{2}}}\right) - \dots - 1 \mp \frac{1}{\lambda}, e g M - f g N \mp e h N \times F \pm \frac{1}{\lambda} e g N G$.

Si $v = \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$, & $ga^{\lambda} = eh - fg$, la fluxion $dz \zeta^{\frac{1}{\lambda} - n - 1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$ de G, deviendra $-\frac{\lambda}{ng} v^{\frac{1}{\lambda} - 1} - \frac{\lambda}{ng} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}}$, s'il y a $+$ d , ou $-\frac{\lambda}{ng} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}}$, s'il y a $- d$.

Et la fluxion $dz \zeta^{\frac{1}{\lambda} - n - 1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$ de F, fera $-\frac{\lambda}{ng} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}} \times \frac{e}{v^{\lambda} - f}$, ou $-\frac{\lambda}{nb} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}} - \frac{\lambda f}{nb} \times \frac{v^{\lambda - 1}}{v^{\lambda} - f}$, si $+$ d , ou $\frac{\lambda}{nb} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}} - \frac{v^{\lambda - 1}}{v^{\lambda} - f}$ si $- d$, dont la fluente peut être trouvée comme ci-devant.

CAS VIII.

77. Soit θ un nombre entier négatif, la fluxion $dz \zeta^{-\theta - n - 1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$, peut être changée en $dz \zeta^{-\theta - n - 1} \times \frac{e \zeta^{-\frac{1}{\lambda}} + f \zeta^{\frac{1}{\lambda}}}{g \zeta^{-\frac{1}{\lambda}} + h \zeta^{\frac{1}{\lambda}}}$, & comme $\frac{-\theta - n - 1}{-n} = \theta + 1$, on aura $\theta + 1 = r$, $\theta \pm \frac{1}{\lambda} = s$, $\theta = t$, $q = 0$, c'est pourquoi la fluente du problème deviendra $\frac{dz^{\theta - n - 1}}{-n e g} P^{\frac{1}{\lambda} \pm \frac{1}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{e}{\theta - 1} \times \frac{h A}{g} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{f A}{e} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{f h A}{e g} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{h B}{g} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{f B}{e} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{f h B}{e g} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{h C}{g} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t - 1}{\theta - 1} \times \frac{f C}{e} \zeta^{\frac{1}{\lambda}} \right) - f h M + 1 \pm \frac{1}{\lambda}, e h N, F.$

Si $v = \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$, & si $ga^{\lambda} = eh - eg$, la fluxion $dz \zeta^{\frac{1}{\lambda} - n - 1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+hz^{\frac{1}{\lambda}}}$ de F, deviendra $-\frac{\lambda}{ng} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}}$, si $- d$, ou $-\frac{\lambda}{ng} v^{\frac{1}{\lambda} - 1} + \frac{\lambda}{ng} \times \frac{a^{\lambda} + v^{\lambda - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}}$, si $+$ d , dont la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

78. Soit θ un nombre entier, la fluente de $d\dot{z} \dot{z}^{\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$, fera par le septième cas, $\frac{dz^{\theta-1}}{nfb} \text{ Pt} \times \text{par} \left(\frac{1}{\theta-1} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{gA}{bz^2} - \frac{2\theta-3}{\theta-2} \times \frac{eA}{2fz^2} - \frac{\theta-1}{\theta-3} \times \frac{gA}{fbz^2} - \frac{\theta-1}{\theta-3} \times \frac{gB}{bz^2} - \frac{2\theta-7}{\theta-3} \times \frac{eB}{2fz^2} - \frac{\theta-3}{\theta-4} \times \frac{gB}{fbz^2} - \frac{\theta-3}{\theta-4} \times \frac{gC}{bz^2} - \frac{2\theta-9}{\theta-4} \times \frac{eC}{2fz^2} \right) \dots \dots \dots \frac{1}{2} egM + fgN + \frac{1}{2} e h N \times F + \frac{1}{2} egNG$.

La fluxion $\dot{z} \dot{z}^{\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$ de G, fera $\frac{1}{ng} \times \frac{z}{aa+vv}$, &c celle de $\dot{z} \dot{z}^{\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$ de F, fera $\frac{1}{nb} \times \frac{z}{aa+vv} - \frac{1}{nb} \times \frac{z}{vv-f}$. C'est pourquoi, si $R=a=\sqrt{\frac{fg-eb}{g}}$, $T=v=\sqrt{\frac{e+fz^2}{z}}$, $S=\sqrt{\frac{eg+ebz^2}{gz^2}}$, $t=f$, $z=T$, &c $s=\sqrt{\frac{e}{z}}$, on aura $G=\frac{1}{naag}(1)$, &c $F=\frac{1}{nbhaa}(1) + \frac{1}{nfh}(1)$.

De là il suit que la fluente de $d\dot{z} \dot{z}^{\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$, fera $\frac{z^{\theta}}{nfb} dT - \frac{zg}{nbhaa} d(1) - \frac{zfg+eb}{nffhb} d(1)$, parce que $\theta=2$, $M=0$, &c $N=\frac{d}{nfb}$.

C A S X.

79. La fluente de $d\dot{z} \dot{z}^{-\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$, fera par le huitième cas, $\frac{dz^{-\theta-1}}{nfg} \text{ Pt} \times \text{par} \left(\frac{1}{\theta-1} - \frac{bA}{g} \dot{z}^{\theta} - \frac{2\theta-3}{\theta-1} \times \frac{fA}{2e\dot{z}^{\theta}} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{f h A}{eg} \dot{z}^{\theta} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{hB}{g} \dot{z}^{\theta} - \frac{2\theta-5}{\theta-2} \times \frac{fB}{2e\dot{z}^{\theta}} - \frac{\theta-1}{\theta-3} \times \frac{f h B}{eg\dot{z}^{\theta}} - \frac{\theta-1}{\theta-3} \times \frac{hC}{g} \dot{z}^{\theta} - \frac{2\theta-7}{\theta-3} \times \frac{fC}{2e\dot{z}^{\theta}} \right) \dots \dots \dots f h M + \frac{1}{2} e h N \times F$.

La fluxion $\dot{z} \dot{z}^{-\theta-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}^{\frac{1}{2}}$ de F, fera par le même cas

$\frac{-1}{2ng} \times \frac{z}{aa+vv}$, & par conséquent $F = \frac{z}{ngaa} (1)$; de là il suit que la fluente de $dz \zeta^{-1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$, sera $\frac{-1}{ng} dT - \frac{zb}{ngaa} d(1)$, parce que $\theta = 1$, $M = 0$, & $N = \frac{-1}{ng}$.

C A S X I.

80. Soit θ un nombre entier & positif; la fluente de $dz \zeta^{1n-1+1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$, sera par le septième cas, $\frac{dz^{1n-1+1n-1}}{nfb} P^1 \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta-1} \times \frac{gA}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eA}{zfz^{\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{eGA}{fbz^{2\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{gB}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eB}{zfz^{\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{eGB}{fbz^{2\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{gC}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eC}{zfz^{\theta-1}} \right) + \frac{1}{ng} eGM + \frac{1}{ng} fGN - \frac{1}{ng} eHN \times F - \frac{1}{ng} eGN$.

La fluxion de $\zeta^{1n-1+1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$ de G , sera changée en $\frac{-1}{ng} \times \frac{zvv}{aa+vv}$, ou bien en $\frac{-1}{ng} + \frac{z}{ng} \times \frac{aa+z}{aa+vv}$; & la fluxion de $\zeta^{1n-1+1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$ de F , en celle-ci $\frac{-1}{ng} \times \frac{z}{vv-f} - \frac{z}{ng} \times \frac{aa+z}{aa+vv}$; & ainsi $G = \frac{-1}{ng} T + \frac{z}{ng} (1)$, & $F = \frac{-1}{ng} (1) + \frac{z}{ng} (2)$.

De là il suit que la fluente de $dz \zeta^{1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$, sera $\frac{z}{ng} dT + \frac{zb}{ngb} d(1) + \frac{e-bz^2}{ngfb} d(2)$; parce que $\theta = 1$, $M = 0$, & $N = \frac{d}{ngfb}$.

C A S X I I.

81. Soit θ un nombre entier négatif, la fluente de $dz \zeta^{-1n-1+1n-1} \times \frac{e+fz^2}{g+bz^2}$, sera par le huitième cas, $\frac{dz^{-1n-1+1n-1}}{ng} P^1 \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta-1} \times \frac{gA}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eA}{zfz^{\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{eGA}{fbz^{2\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{gB}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eB}{zfz^{\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{eGB}{fbz^{2\theta-1}} - \frac{\theta-1}{\theta-1} \times \frac{gC}{bz^{\theta-1}} - \frac{1}{\theta-1} \times \frac{eC}{zfz^{\theta-1}} \right) + \frac{1}{ng} eGM + \frac{1}{ng} fGN - \frac{1}{ng} eHN \times F$.

La fluxion $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ de F, deviendra $\frac{-\frac{1}{n}}{g} + \frac{1}{n \frac{1}{n}}$
 $\times \frac{a a^{\frac{1}{n}}}{a a^{\frac{1}{n}} + v v^{\frac{1}{n}}}$.

Donc $F = \frac{-1}{n g} T + \frac{1}{n g} (1)$. De là il suit que la fluente de
 $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$, sera $\frac{-1 \cdot g - 1 \cdot f g z^{\frac{1}{n}} + e h z^{\frac{1}{n}}}{3 n e g g z^{\frac{1}{n}}} dT - \frac{1 h d}{n g g}$
 (2); parce que $\theta = 2$, $M = 0$, & $N = \frac{-1 d}{3 n e g}$.

C A S X I I I.

82. Si θ est un nombre entier positif, la fluente de $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ $\times$
 $\frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$, sera $\frac{dz^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{n f h} Q^{\frac{1}{n}} \times$ par $\left(\frac{1}{1} - \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{g A}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-r}{\theta-1} \times \frac{e A}{f z^{\frac{1}{n}}} \right.$
 $- \frac{e g A}{f h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{g B}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-r}{\theta-1} \times \frac{e B}{f z^{\frac{1}{n}}} - \frac{e g B}{f h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{g C}{h z^{\frac{1}{n}}} - \frac{1-r}{\theta-1}$
 $\times \frac{e C}{f z^{\frac{1}{n}}} \Big) - e g M + 1 + \frac{1}{\lambda}, f g N + 1 - \frac{1}{\lambda}, e h N, \times F$.

Si l'on fait $v = \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$, & $a a = fg - eh$, la fluxion $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$
 $\times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ de F, deviendra $\frac{a a}{n} \times \frac{1 + v^{\theta-1}}{b v^{\lambda-1} f}$, ou bien $\frac{a a}{n b} \times \frac{1 + v^{\theta-1}}{b v^{\lambda-1} f}$
 $- \frac{a a}{n b} \times \text{flux. } \frac{-v^{\theta}}{b v^{\lambda-1} f}$, dont la fluente peut être trouvée par ce
 qui a été dit auparavant.

C A S X I V.

83. Lorsque θ est négatif, la fluxion $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$ $\times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$
 peut être changée en $dz \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{n}}}{g+hz^{\frac{1}{n}}}$; & comme $\frac{-1}{n} = \theta$; si l'on met e pour f , f pour e , g pour h , h pour g , $-n$
 pour n , & z^{-n} pour z^n , on aura $\frac{dz^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{-n g} \times Q^{\frac{1}{n}} \times$ par $\left(\frac{1}{1} - \frac{r-1}{\theta-1} \right.$

$$\frac{1}{b-1} \times \frac{bA}{g} z^n - \frac{1}{b-1} \times \frac{fA}{e} z^n - \frac{fbA}{eg} z^{n-1} - \frac{1}{b-1} \times \frac{bB}{g} z^n - \frac{1}{b-1} \times \frac{fB}{e} z^n - \frac{fbB}{eg} z^{n-1} - \frac{1}{b-1} \times \frac{bC}{g} z^n - \frac{1}{b-1} \times \frac{fC}{e} z^n \dots$$

$$fhM + 1 + \frac{1}{\lambda}, e h N + 1 - \frac{1}{\lambda}, fgN \times F.$$

La fluxion $z z^{n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+bz^{\frac{1}{\lambda}}}$ de F, deviendra $\frac{aa}{ng} \times \frac{z^{n-1}}{g^{n-1}}$ flux. $\frac{aa}{g^{n-1}}$, dont la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

C A S X V.

84. Si $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, & la fluente de $dz z^{n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}$ deviendra par le treizième cas, $\frac{dz^{n-1}}{nfb} \times \frac{P^{\frac{1}{2}}}{Q} \times$ par $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g-1} \times \frac{gA}{2bx^2} - \frac{1}{g-1} \times \frac{eA}{2fx^2} - \frac{egA}{fbx^2} - \frac{1}{g-1} \times \frac{gB}{2bx^2} - \frac{1}{g-1} \times \frac{eB}{2fx^2} - \frac{egB}{fbx^2} - \frac{1}{g-1} \times \frac{gC}{2bx^2} - \frac{1}{g-1} \times \frac{eC}{2fx^2} \right) \dots$
 $egM + \frac{1}{2} fgN + \frac{1}{2} e h N \times F.$

Et la fluxion $z z^{n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}$ de F, fera $\frac{aa}{nb} \times \frac{z^{n-1}}{b^{n-1}}$ flux. $\frac{aa}{b^{n-1}}$.

Donc si $R = \sqrt{\frac{f}{b}}$, $T = \sqrt{\frac{e+fz^{\frac{1}{2}}}{g+bz^{\frac{1}{2}}}}$, $S = \sqrt{\frac{e-b-fg}{bg+bhz^{\frac{1}{2}}}}$, on aura
 $F = \frac{1}{nb} PQ^{\frac{1}{2}} + \frac{e-b-fg}{nfb} (1).$

C A S X V I.

85. Lorsque θ est négatif, la fluente de $dz z^{n-1} \times \frac{e+fz^{\frac{1}{\lambda}}}{g+bz^{\frac{1}{\lambda}}}$ fera par le quatorzième cas, $\frac{dz^{n-1}}{nfg} \times \frac{P^{\frac{1}{2}}}{Q} \times$ par $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g-1} \times \frac{bA}{2g} z^n - \frac{1}{g-1} \times \frac{fA}{2e} z^n - \frac{fbA}{eg} z^{n-1} - \frac{1}{g-1} \times \frac{bB}{2g} z^n - \frac{1}{g-1} \times \frac{fB}{2e} z^n - \frac{fbB}{eg} z^{n-1} - \frac{1}{g-1} \times \frac{bC}{2g} z^n - \frac{1}{g-1} \times \frac{fC}{2e} z^n \dots \right)$
 Q_1

$$\frac{f b B}{e g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{b C}{e g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{f C}{e g} z^n) - f h M + \frac{1}{e} h N + \frac{1}{e} f g N \times F.$$

Et la fluxion de $z^{n-1} \times \frac{e+fz^{n-1}}{g+bz^n}$ de F, sera $-\frac{an}{eg} \times \frac{z}{g+bz^n} + \frac{an}{eg} \text{ flux. } \frac{z}{g+bz^n}$.

Donc si $r = \sqrt{\frac{e}{g}}$, $t = \frac{e+fz^{n-1}}{g+bz^n}$, $s = \frac{fz^{n-1}-bz^{n-1}}{g+bz^n}$, on aura $F = \frac{1}{eg} \text{ PQ} = \frac{fz^{n-1}-bz^{n-1}}{eg} (2)$.

Et la fluxion de $z^{n-1} \times \frac{e+fz^{n-1}}{g+bz^n}$, sera $-\frac{z}{n} \times \frac{fz^{n-1}}{g+bz^n} - \frac{z}{n} \times \frac{e}{g+bz^n}$; par conséquent la fluente sera $\frac{z}{n} (1) - \frac{z}{n} (2)$.

C A S X V I I.

86. Si $\pi = \pi = -1$, on aura $\theta - 1 = r = s$, $t = \theta - 2$, & la fluente de $\frac{d z z^{n-1}}{e+fz^{n-1}+bz^n}$, sera par le problème $\frac{d z z^{n-1}}{n f b}$ $\times$ par $\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{g A}{f z} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e A}{f z} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e g A}{f b z^2} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e B}{b z^n} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e B}{f z} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e g B}{f b z^2} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e C}{b z^n} - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{e C}{f z} \right) - \dots \log. \frac{z, e+fz^{n-1}}{e, g+bz^n} \times$ par $\frac{e g M}{e l - f g}$; cette suite doit être continuée à $\theta - 2$ termes outre le logarithme.

C A S X V I I I.

87. La fluente de $\frac{d z z^{n-1}}{e+fz^{n-1}+bz^n}$, sera par le problème $\frac{d z z^{n-1}}{n e g}$ $\times$ par $\left(\frac{1}{1-t} \times \frac{b A z^n}{g} - \frac{1}{1-t} \times \frac{f A}{e} z^n - \frac{1}{1-t} \times \frac{f b A}{e g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{b B}{g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{f B}{e} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{f b B}{e g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{b C}{g} z^n - \frac{1-t}{1-t} \times \frac{f C}{e} z^n \right) - \dots \frac{f b M}{e b - f g} \times \frac{g f}{e b} \log. \frac{e+fz^{n-1}}{g+bz^n}$.

C A S X I X.

38. Si $\frac{d z^{n+\lambda-1}}{e+fz^2 \times g+bz^2}$, on aura $\theta + \frac{\delta}{\lambda} - 1 = r = s$, $\theta + \frac{\delta}{\lambda} - 2 = t$: or $r - 1 = t$, &c la fluente sera par le probleme, en faisant $\pi = 1$, $\pi = -1$, $\frac{d z^{r\pi}}{u f h z} = \frac{r-1}{r-1} \times \frac{g A}{h z^2} - \frac{r-1}{r-1} \times \frac{e A}{f z^2} - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{e g A}{f h z^{12}} - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{g B}{h z^2} - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{e B}{f z^2} - \frac{r-1}{r-4} \times \frac{e g B}{f h z^{12}} - \frac{r-3}{r-4} \times \frac{g C}{h z^2} - \frac{r-3}{r-4} \times \frac{e C}{f z^2} - 1 + \frac{\delta}{\lambda}$, $e g M + \frac{\delta}{\lambda}$, $f g + e h$, $N \times F + \frac{\delta}{\lambda}$, $e g N G$.

La fluxion $\frac{d z^{n+\lambda-1}}{e+fz^2 \times g+bz^2}$ de G, peut, en faisant $a = eh - fg$, être changée en $\frac{1}{a} \left(\frac{f d z^{n+\lambda-1}}{e+fz^2} - \frac{h d z^{n+\lambda-1}}{g+bz^2} \right)$, &c la fluxion $\frac{d z^{n+\lambda-1}}{e+fz^2 \times g+bz^2}$ de F, en $\frac{1}{a} \left(\frac{e d z^{n+\lambda-1}}{e+fz^2} - \frac{g d z^{n+\lambda-1}}{g+bz^2} \right)$, dont les fluents peuvent être trouvées par ce qui a été dit ci-devant.

C A S X X.

39. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{d z^{n-\theta+\lambda-1}}{e+fz^2 \times g+bz^2}$ peut être changée en $\frac{d z^{n-\theta+\lambda-1}}{e z^{n-2} + f z g z^{n-2} + b}$, &c comme $\frac{-n-1+\lambda}{-n} = \theta + 2 - \frac{\delta}{\lambda}$, on aura $\theta - \frac{\delta}{\lambda} + 1 = r = s$, &c $\theta - \frac{\delta}{\lambda} = t$; si donc on met $\theta + 2 - \frac{\delta}{\lambda}$, ou $r + 1$ pour θ , $-n$ pour n , e pour f , f pour e , g pour h , h pour g , &c z^{-n} pour z^n , dans la dernière formule,

on aura $\frac{d z^{n-\theta+\lambda-1}}{e z^{n-2} + f z g z^{n-2} + b} \times$ par $\left(\frac{1}{r-1} - \frac{r-1}{r-1} \times \frac{h A}{g} z^n - \frac{r-1}{r-1} \times \frac{f A}{e} z^n - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{f h A}{e g} z^{12} - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{h B}{g} z^n - \frac{r-1}{r-3} \times \frac{f B}{e} z^n - \frac{r-1}{r-4} \times \frac{f h B}{e g} z^{12} - \right.$
Q q ij

$\frac{r-1}{r-4} \times \frac{hC}{g} \zeta^n - \frac{r-1}{r-4} \times \frac{fC}{e} \zeta^n) \dots + \frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}, fhM + eh + fg, \frac{1}{\lambda} N \times F$
 $+ \frac{1}{\lambda} fhNG$; cette fluente doit être continuée à θ termes.

La fluxion $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n \times g+hx^2}$ de G, se peut réduire à $\frac{1}{a} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n} \right.$
 $\left. - \frac{b \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{g+bx^2} \right)$, en supposant $a = fg - eh$, & la fluxion
 $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n \times g+hx^2}$ de F, à $\frac{1}{e} \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1} - \frac{ff}{ae} \times \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n} - \frac{hb}{ag} \times$
 $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{g+bx^2}$, les fluentes de l'une & de l'autre peuvent être trouvées
 par le moyen de la quadrature des sections coniques.

C A S X X I.

90. Si $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$, la fluente de $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n \times g+hx^2}$, sera, par le dix-neuvième cas, $\frac{d x^{\frac{1}{2}n-1}}{n f b} \times$ par $\left(\frac{1}{2l-1} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{gA}{hx^n} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{eA}{f x^n} \right.$
 $\left. - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{e g A}{f b x^{2l}} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{g B}{h x^n} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{e B}{f x^n} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{e g B}{f b x^{2l}} - \right.$
 $\left. \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{g C}{h x^n} - \frac{2l-1}{2l-1} \times \frac{e C}{f x^n} \right) \dots - \frac{1}{2} e g M + f g + e h \times \frac{1}{2} N \times F$
 $+ \frac{1}{2} e g N G$.

La fluxion $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n \times g+hx^2}$ de G, sera $= \frac{f}{a} \times \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n} - \frac{b}{a} \times$
 $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{g+bx^2}$, & la fluxion $\frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n \times g+hx^2}$ de F, $= \frac{e}{a} \times \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fx^n} + \frac{g}{a}$
 $\times \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}n-1}}{g+bx^2}$. Par conséquent, si $R = \sqrt{\frac{e}{f}}$, $T = \zeta^{\frac{1}{2}n}$, $S = \frac{e+fx^{\frac{1}{2}}}{f}$,
 $r = \sqrt{\frac{g}{b}}$, $t = \zeta^{\frac{1}{2}n}$, $s = \frac{g+bx^{\frac{1}{2}}}{b}$, on aura $G = \frac{1}{naa} (1) - \frac{1}{naa} (2)$
 (2) , & $F = \frac{1}{naa} (1) + \frac{1}{naa} (2)$.

De là, en faisant les coefficients des mêmes termes égaux, & les autres égaux à zéro; on aura

$$\begin{aligned} gA &= gl & A &= l. \\ gB + fA &= fl - gk, & \text{ou} & -B = k. \\ gC + fB + eA &= 0, & -C &= \frac{f}{g}B + \frac{e}{g}A. \\ gD + fC + eB &= 0, & -D &= \frac{f}{g}C + \frac{e}{g}B. \\ fD + eC &= x, & -x &= fD + eC. \\ eD &= y, & -y &= 2 - - - eD. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{x^{n-1}}{n} \times \text{par} \left(\frac{A}{1-1} + \frac{Bx^{-1}}{1-1} + \frac{Cx^{-2}}{1-1} + \frac{Dx^{-3}}{1-1} \right) - - - -$$

$fD + eC$, $F + eDG$, sera la fluente cherchée; l'une & l'autre de ces fluentes doivent être continuées à $\theta - 1$ termes, & leur différence multipliée par $\frac{d}{g}$, donnera la fluente cherchée du problème, lorsque $\theta = 2$, on aura $C = 0$; si $P = e + f\zeta^n + g\zeta^{2n} + \dots$, $\zeta\zeta^{2n-1}P^{-1}$ sera la fluxion de F , & $\zeta\zeta^{n-1}P^{-1}$ celle de G .

Si l'on fait $2g\zeta^n = f + 2g\zeta^n$, & $4ag = 4eg - ff$, la fluxion de G deviendra $\frac{\frac{1}{2}g\zeta^n}{a + g\zeta^n}$, & celle de F , $\frac{1}{2ng} \times \frac{2g\zeta^n - f\zeta^n}{a + g\zeta^n}$. Or si $R = \sqrt{\frac{a}{g}}$, $T = \nu$, $S = \frac{a + g\nu^2}{g}$, & $L = \log. \frac{a + f\zeta^n + g\zeta^{2n}}{g}$, on aura $G = \frac{1}{na}(1)$, & $F = \frac{L}{2ng} - \frac{f}{2ag}(2)$.

COROLLAIRE I.

93. Si $\theta = 1$, la fluxion $\frac{d}{g} \times \left(\frac{ll\zeta^{n-1}}{k + l\zeta^n} - \frac{gl\zeta^n + fl - gkn\zeta^{n-1}}{e + fz^n + g\zeta^{2n}} \right)$ deviendra $\frac{d}{g} \times \left(\frac{ll\zeta^{n-1}}{k + l\zeta^n} - \frac{2gl\zeta^n + lf\zeta^n - 2gk\zeta^{n-1}}{2na + g\zeta^n} \right)$; dont la fluente sera $\frac{dl}{nq} \log. \frac{k + l\zeta^n}{k} - \frac{dl}{2ng} L + \frac{lf - 2gk}{2nag} d(1)$, ou bien en faisant $K = \log. \frac{e + fz^n + g\zeta^{2n}}{k + l\zeta^n}$, cette fluente deviendra $-\frac{dl}{2nq} K + \frac{lf - 2gk}{2nag} d(2)$.

COROLLAIRE II.

94. Si $\theta = 2$, la fluxion $\frac{d \dot{x} z^{2n-1}}{k + l z^n + e + f z^n + g z^{2n}}$, fera, par l'article 93, changée en $\frac{d}{q} \times \left(\frac{l k \dot{x} z^{2n-1}}{k + l z^n} - \frac{e l + f k z^n + \dot{x} z^{2n-1}}{e + f z^n + g z^{2n}} \right)$, & le dernier terme, par le même article, en $\frac{1}{2n} \times \frac{2 e l - f k, \dot{x} + 2 g l z^n}{e + f z^n + g z^{2n}}$, dont la fluente est $\frac{2 e l - f k}{2 n} (1) + \frac{k}{2 n} L$; & celle du premier sera $\frac{k}{2 n} \times \log. \frac{k + l z^n}{k}$: or comme $L = \log. \frac{k + l z^n}{k} = K$, la fluente cherchée sera $\frac{d k}{2 n g} K + \frac{2 e l - f k}{2 n a g} (1)$.

COROLLAIRE III.

95. Si $\theta = 3$, la première fluente sera $\frac{l x^{1n}}{2 n} - \frac{k x^n}{n} + \frac{k k}{n l} \log. \frac{k + l z^n}{k}$, & la seconde $\frac{l x^{2n}}{2 n} - \frac{k x^n}{n} - \frac{e l - f k}{2 n g} L + \frac{2 e g k + e f l - f f k}{2 n a g} (1)$, parce que $C = \frac{l}{2 n}$, & $D = -\frac{k}{n}$; & comme $q = e l l - f k l + g k k$, ou $\frac{q - g k k}{l} = e l - f k$, on aura $\frac{e l - f k}{2 n g} L = \frac{q - g k k}{2 n g l} L = \frac{q}{2 n g l} L - \frac{k k}{2 n l} L$; & comme on a aussi $\frac{k k}{n l} \log. \frac{k + l z^n}{k} = \frac{k k}{2 n l} \log. \frac{k + l z^n}{k}$, on aura $\frac{k k}{2 n l} L - \frac{k k}{2 n l} \log. \frac{k + l z^n}{k} = \frac{k k}{2 n l} K$, art. 93; par conséquent $\frac{d}{2 n g l} L - \frac{k k l}{2 n l g} K + \frac{2 e g k + e f l - f f k}{2 n a g g} d (1)$, fera la fluente cherchée.

COROLLAIRE IV.

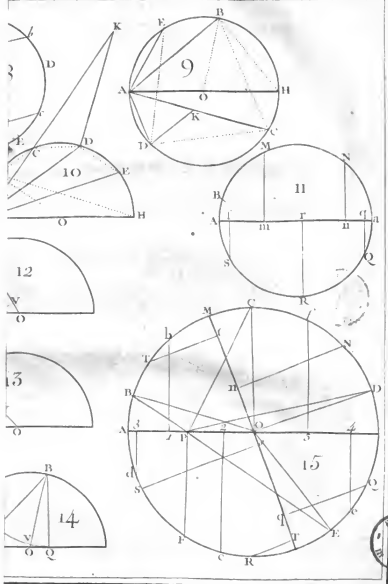
96. Si $\theta = 0$, la fluxion $\frac{d \dot{x} z^{2n-1}}{k + l z^n + e + f z^n + g z^{2n}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{d \dot{x} z^{2n-1}}{k z^{2n} + l x e z^{2n} + f z^{2n} + g}$. Or si l'on met k pour l , l pour k , e pour g , g pour e , $-n$, pour n , & z^{-n} pour z^n , dans la fluente de l'article précédent, on aura $\frac{d}{2 n e k}$

$L + \frac{ll d}{2 n e q} K - \frac{l e g l + f g k - f f l}{2 a n e q} (2)$, pour la fluente de cette fluxion.

C O R O L L A I R E V.

97. A cause que la fluxion $\frac{d k x^{-\theta-1}}{k + l x^n e + f x^n + g x^{1n}}$, peut être changée en $\frac{d k x^{-\theta-1}}{k x^{-n} + l x e x^{-1n} + f x^{-n} + g}$; & comme les cas ou $-\theta$ est 0, 1, 2, 3, &c. répondent aux cas dans lesquels $+\theta$ est 3, 4, 5, 6, &c. en prenant $l, k, g, e, -n, x^{-n}$, pour k, l, e, g, n, x^n , respectivement, on aura les fluentes de cette dernière fluxion dans ces différens cas.

Il est aisé de s'appercevoir que la méthode que nous venons de suivre s'étend à des fluxions dont le dénominateur est un multinome quelconque, ou le produit de plusieurs; mais comme la spéculation peut être poussée trop loin: nous avons cru que ce que nous venons de dire étoit suffisant pour l'instruction du lecteur, lequel peut, s'il le veut, la continuer autant qu'il jugera à propos.





Formules générales contenues dans ce Traité.

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{e + f x^2}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1} x^{\pm \lambda-1}}{e + f x^2}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{x^{1n} \mp 2 n x^2 r^{n-1} + r^{2n}}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{x^{1n} \mp 2 n x^2 r^{n-1} + r^{2n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$d z x^{\pm n-1} \times \frac{e + f x^{\pm n}}{e + f x^{\pm n}}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{e + f x^2 \times g + h x^2}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{e + f x^2 \times g + h x^2}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{e + f x^2 \times g + h x^2}$$

$$\frac{d z x^{\pm n-1}}{e + f x^2 \times g + h x^2}$$



T R A I T É D U M O U V E M E N T DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

I N T R O D U C T I O N.

LA Méchanique, quant aux besoins de la vie, est sans contredit la partie des Mathématiques la plus utile, & en même temps la plus étendue. Elle est devenue plus recommandable encore depuis qu'on est parvenu à l'appliquer au cours des Astres. Aussi les plus habiles Mathématiciens s'y sont attachés préféralement à toute autre. Chacun profitant des réflexions de ceux qui l'avoient précédé, & de leurs découvertes, faisoit tous ses efforts pour l'approfondir, & pour en étendre les limites, de maniere que peu à peu cette inestimable science est parvenue à un si haut degré de perfection, qu'il semble qu'à peine on n'y puisse rien ajouter digne d'être présenté au public.

Galilée découvrit les loix du mouvement des corps qui tombent dans un milieu sans résistance. Il appliqua cette découverte à la courbe que décrit un corps poussé par une vitesse donnée dans une direction quelconque.

M. Descartes, observant la force par laquelle une pierre, que l'on tourne dans une fronde, tâche à s'éloigner, ouvrit sur le mouvement une nouvelle carrière beaucoup plus vaste que n'avoit fait Galilée.

M. Huygens, qui appella cette force, *force centrifuge*, s'appliqua fort à la recherche de ses loix. Il fit pour cet effet un

grand nombre de tentatives, & donna enfin treize theorèmes, sans démonstration.

A peine le Chevalier Newton l'ayant sçu, que sa pénétration extraordinaire le conduisit bientôt à la découverte des loix de la force qui détourne les corps en mouvement de leurs directions en ligne droite pour leur faire décrire des courbes quelconques : il nomma cette force, *force centripete*. Mais non content d'en avoir démontré les loix dans un milieu sans résistance, il en fit l'application dans un milieu quelconque : autre découverte, encore beaucoup plus étendue que toutes celles qu'on avoit faites avant lui sur cette matiere.

Kepler, ayant trouvé par un grand nombre d'observations astronomiques, que les orbes des planetes étoient des ellipses, dont le soleil occupoit un des foyers ; que leurs temps périodiques étoient entr'eux comme les aires décrites par la ligne tirée de ce foyer ou centre de force, au centre du corps ; & que les quartés des temps étoient comme les cubes des distances moyennes des orbes ; l'incomparable Newton démontra mathématiquement l'infailibilité de ces loix, & il trouva outre cela que les forces centripetes qui retiennent les corps dans les orbes elliptiques, étoient en raison inverse des quartés des distances du foyer ; & que la cause qui retenoit un corps dans son orbe devoit être aussi celle qui retenoit tout autre corps dans le sien. Delà s'ensuivit la gravité universelle : sur ce principe il composa son système du Monde, qui assurément doit rendre son nom immortel.

Depuis que les Principes de Philosophie naturelle ont paru, les plus grands Mathématiciens de l'Europe se sont trouvés assez occupés à en dévoiler quelque partie. Car il y traite les choses d'une maniere fort succincte, & les démontre par la synthese, ce qui rend plusieurs de ses démonstrations un peu obscures. D'un autre côté, ce Livre contient presque toutes les parties des Mathématiques & de Physique : on n'a guere lieu d'espérer de nouvelles découvertes ; aussi tout ce qu'on a pu faire depuis, a été ou d'en démontrer quelque partie d'une maniere plus claire, ou de les étendre davantage que l'Auteur n'avoit fait.

Le but de cet ouvrage est de réduire tout ce qu'il y a d'essentiel sur le mouvement dans le Livre de Newton, sous un même point de vue par un système du mouvement en général, d'une maniere aussi claire qu'aisée. Tout ce qu'on y donne ne

dépendant que de deux Theotèmes généraux connus de ceux qui ont traité du mouvement; le reste en découle comme des conséquences nécessaires. Après avoir donné les premiers principes du mouvement dans un milieu sans résistance, on tâche de développer le rapport des forces qui poussent ou attirent les corps, c'est-à-dire, la force centripete qui tend vers un point fixe, ou dont les directions sont paralleles; & pour mieux connoître l'usage de ce Problème, on donne des exemples de l'un & de l'autre cas dans les sections coniques.

La force centripete, qui tend vers un des foyers, étant toujours réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, les temps comme les espaces décrits par la ligne tirée du foyer au corps, & les quarrés des temps périodiques comme les cubes des distances moyennes, & si ces loix s'accordent parfaitement avec celles que Kepler avoir observées dans les Planetes, on a eu raison de conclure que les corps célestes décrivent des ellipses dans leurs révolutions autour du soleil, qui en occupe un des foyers. Cependant, malgré cette grande uniformité des loix observées par Kepler, & celles qu'on découvre dans l'ellipse par la théorie, quelques Mathématiciens ont douté s'il n'y avoit point d'autre courbe qui ait les mêmes propriétés que l'ellipse. Quoiqu'on en sentir assez l'impossibilité, on a néanmoins voulu donner l'inverse de ce problème; sçavoir, la force centripete étant réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, l'on demande la nature de la courbe décrite par le corps, & l'on trouve encore que c'est une section conique, c'est-à-dire, une ellipse, ne pouvant être ni hyperbole, ni parabole, l'une & l'autre s'ouvrant à l'infini.

On a remarqué par les plus exactes observations que la parallaxe horizontale du soleil est de dix secondes & demie; delà on trouve la distance moyenne de la terre au soleil exprimée en demi-diametres de la terre; les distances moyennes des Planetes au Soleil exprimées par les mêmes rayons. Or connoissant les diametres apparens des Planetes, & leurs temps périodiques par observation, il est facile d'en connoître leurs vrais diametres aussi-bien que leur solidité & la densité de celles qui ont des Satellites; car quant aux autres, on n'a pas encore découvert la méthode de les connoître.

Quoique nos principes soient généraux & applicables à toutes les différentes loix dont les forces centripetes peuvent être sus-

ceptibles, nous n'avons néanmoins donné des exemples que du seul cas, lorsqu'elles sont comme les quarrés de la distance inverse, qui est la seule qui ait lieu dans la nature, de peur d'abuser de la patience du lecteur qui cherche à s'instruire; c'est pourquoi, nous n'avons fait entrer dans ce petit ouvrage, que des questions qui sont ou fort utiles, ou très-essentiels; & nous pensons ne l'avoir pas peu obligé en lui épargnant & son temps, & la peine de lire un gros volume.

Depuis que le célèbre Newton a proposé aux Philosophes la figure de la terre, cette recherche a été le principal objet d'étude des plus grands Géometres. Plusieurs ouvrages ont depuis paru sans qu'aucun ait pu encore s'accorder sur le rapport que l'équateur doit avoir avec l'axe; & il est fort étonnant que malgré les méditations de tant de célèbres Mathématiciens, malgré les mesures des degrés de Méridiens dans plusieurs latitudes, & un nombre d'expériences presque infinie, sur la longueur des Pendules à secondes, qu'on a fait depuis quelque temps sous le cercle polaire & l'équateur, outre celles qu'on avoit déjà faites en France & en Angleterre, il est, dis-je, étonnant qu'après tant de travaux, on se trouve encore dans la première incertitude. Voilà la raison pour laquelle nous croyons ne pouvoir rien mettre au jour qui mérite davantage l'attention du public que de déduire des principes les plus simples, la véritable figure de la terre, sans faire aucun usage du calcul des fluxions, dont tous les Auteurs se sont servis, excepté le seul Chevalier Newton.

Pour parvenir à trouver cette figure selon la méthode ordinaire, on cherche d'abord la force avec laquelle un corps placé sur la surface de la terre est attiré vers le centre; on se sert pour cet effet assez inutilement d'un calcul fort long & très-ennuyeux. Car dès qu'on accorde que la force centripète est en raison directe de la quantité de matière qui attire, & en raison inverse des quarrés des distances, il est évident que si la distance est égale au demi-diamètre du corps, l'attraction sera dans les solides semblables en raison directe de la distance; la solidité des corps semblables étant comme les cubes des demi-diamètres, qui divisée par le quarré du même demi-diamètre, donne pour quotient le demi-diamètre en question, qui exprimera l'effort de la force centripète dans ce cas.

On cherche aussi la direction de la gravité à la surface d'une sphéroïde en repos, non seulement par un calcul encore plus

ennuyeux que l'autre, mais encore avec moins de raison. N'est-il pas évident par les loix de l'Hydrostatique, que la gravité agit toujours perpendiculairement à la surface de tout fluide ? Car placez de niveau avec un niveau d'eau, un plan bien poli, mettez un globe également poli sur ce plan, le globe restera en repos. Il est bien naturel par cette seule expérience de conclure que la gravité agit partout perpendiculairement à la surface de la terre. Or les autres Planetes, selon les sentimens des Philosophes modernes, étant composées de matiere à peu près semblable à celle de la terre, & peut-être en partie de fluide, ne peut-on pas conclure que la gravité agit perpendiculairement sur leurs surfaces, aussi-bien que sur celle de notre terre ?

Après avoir bien ennuyé le lecteur par ces longs calculs, on vient enfin au problème en question. Les Auteurs Anglois veulent que le rapport entre l'équateur & l'axe soit comme 231 à 230. M. Clairaut, qui a suivi leur méthode, trouve ou prétend trouver le même rapport. M. Bouguer s'imagine que ce rapport est comme 179 à 178 ; mais examinons un peu la maniere dont il se sert pour le trouver : il commence par rejeter la section elliptique de la terre ; il fait ensuite un grand nombre de suppositions sur l'accroissement des degrés du Méridien ; il adopte ensuite celui du quarré des sinus de latitude ; & sans s'embarasser de la figure de la section, il trouve le rapport ci-dessus mentionné, qu'il dit être le seul qui soit véritable.

Mais si, en supposant ce rapport, ce Sçavant avoit confronté les degrés du Méridien, mesurés par ses Confreres sous le cercle polaire, & ceux mesurés en France & en Angleterre, il auroit inmanquablement bientôt reconnu son erreur. De même, s'il avoit comparé la longueur du Pendule à secondes, qu'il dit avoir mesuré fort exactement, avec celles qu'on avoit observées dans d'autres latitudes, il auroit du s'appercevoir que la sienne ne s'accorde nullement avec les autres.

Quoi qu'il ne désigne pas la section méridienne de la terre, on voit cependant assez, par ce qu'il en dit, que c'est une spirale, puisque sa développée est ou un quart de cercle, ou une courbe, dont ce quart de cercle est la développée ; ainsi le lecteur peut juger si cet Auteur a raison ou non.

M. Clairaut (1) écrit, page 153 de son livre sur la figure de la terre, que le Chevalier Newton a trouvé le rapport entre l'équa-

(1) Voyez la réponse de cet Auteur à la fin de cet Ouvrage.

teur & l'axe de 230 à 229, sur la supposition que la section de la terre est une ellipse, sans l'avoir démontré : & à la page suivante, il dit : *J'ai cherché les moyens de connoître si en effet elle étoit légitime, & je suis parvenu à en prouver la vérité.* On croiroit à l'entendre qu'il est très-difficile de prouver que cette section est en effet une ellipse. Mais si l'on considère, comme l'a fait M. Newton, que les parties d'un fluide, étant attirées vers un point fixe avec des forces égales à des distances égales de ce point, ce fluide formera une sphere : supposez cette sphere tourner autour de son axe avec une certaine vitesse, comparable à celle produite par la force centripete, les rayons des cercles parallèles à l'équateur, s'allongeront proportionnellement à leur longueur : cela étant, voilà l'ellipse démontrée en tout son jour ; & si le Chevalier Newton ne l'a pas démontrée lui-même, c'est qu'il l'a cru si simple & si palpable, que cela devoit sauter aux yeux de tout le monde.

Mais venons au principal, M. Clairaut suppose d'abord, page 191, que la force centrifuge sous l'équateur est la 289^{me} partie de la gravité primitive, & delà il trouve la différence entre les axes de $\frac{1}{2104}$; ce qui donne le rapport entre les axes de 2314 à 2304, ou de 463 à 461, en l'exprimant par trois figures ; & ce rapport ne s'accordant absolument point avec celui donné par Messieurs Maclaurin & Simpson, qu'il suit dans son calcul, il le suppose être comme 231 à 230, & cherche la force centrifuge, qu'il trouve n'être que la 287. 5^{me} partie de la gravité primitive. Mais n'est-ce pas supposer ce que l'on cherche ? puisque l'équation qu'il donne page 192, exprime le rapport entre la différence des axes & de la force centrifuge, comme 5 à 4 à peu près. Or s'il fait le rapport entre les axes de 231 à 230, il suppose en même temps le rapport entre la force centrifuge & la gravité sous l'équateur de 287. 5 à l'unité : il étoit donc fort inutile de faire la recherche de la force centrifuge par de longs détours, comme il fait dans les deux pages suivantes. Pour faire voir que le rapport entre les axes déterminé par ce Scavant, & en même temps par les Auteurs Anglois mentionnés ci-dessus, n'est point du tout le véritable ; il suffit de jeter les yeux sur la page 194 de son Livre, où il trouve le degré du Méridien sous l'équateur de 57309 toises, ce qui surpasse ce même degré, mesuré par Messieurs Bouguer & Condamine, de 556 toises. S'il admet que ses Confreres se soient si fort trompés dans leurs

mesures, que doit-on croire des mesures du Nord, auxquelles il étoit lui-même employé ? Mais on fait voir dans cet ouvrage qu'ils ont été plus heureux dans leurs mesures que dans la recherche sur le rapport des axes.

La seconde partie de ce petit Traité contient les loix du mouvement dans un milieu, dont la résistance suit la loi des vitesses élevée à une puissance quelconque ; & la supposition que la résistance est comme le quarré des vitesses, étant peut-être la seule qui soit vraie, du moins dans l'air, l'application qu'on fait roule principalement sur cette supposition : mais d'ailleurs nos principes étant généraux, on peut les appliquer, à telle hypothèse qu'on voudra.

Lorsqu'il s'agit du mouvement dans un milieu résistant, il se trouve toujours une quantité indéterminée, que l'on doit connoître avant que de parvenir à la résolution des problèmes ; quelle est, par exemple, la hauteur d'où le corps en question doit tomber dans ce milieu pour y acquérir sa plus grande vitesse possible. Le Chevalier Newton a été le seul, que je sçache, qui ait donné la solution de ce problème, dans la quarantieme proposition du second livre de ses Principes ; mais comme elle dépend de plusieurs théorèmes fort difficiles, on en donne une démonstration fort simple dans cet ouvrage. On commence par les exemples les plus simples, sur les mouvemens des corps qui tombent ou qui sont jettés ; & afin d'en mieux comprendre les principes, on suppose d'abord les corps jettés verticalement en haut, ensuite on cherche la propriété du projectile, lorsque la résistance est comme le quarré des vitesses, dont on donne la portée, le point le plus haut, la vitesse & le temps employé. Et enfin on s'attache à démontrer tout ce qu'il y a d'essentiel dans ce sujet d'une manière si aisée que le lecteur ne peut manquer de l'entendre parfaitement avec une application fort modérée.

Il n'y a point, à mon avis, de problème qui soit plus difficile dans toute la Mécanique, que celui des projectiles ; l'équation fluxionnaire de cette courbe étant si difficile à résoudre, qu'il faut employer tout ce que la Géométrie & l'Algebre peuvent fournir de plus recherché. Car on ne peut exprimer la fluente de cette fluxion par un nombre fini de termes, ni par la quadrature des sections coniques. Il n'y a donc par conséquent point d'autre moyen que de l'exprimer par une suite infinie, ou par la méthode des différences du Chevalier Newton. Mais l'une & l'autre
de

de ces méthodes est sujette à de grands inconvénients ; car ceux qui l'ont exprimée par des suites infinies, comme l'a fait M. Euler, n'ont pas pris garde que ces suites ne convergent que fort lentement , & qu'il faut beaucoup plus de termes qu'ils en ont donnés dans des certains cas , & dans beaucoup d'autres elles ne convergent point du tout. Ainsi cette méthode ne peut être que de très-peu d'usage , du moins de la manière qu'on l'a publiée. En se servant de la méthode des différences, comme M. Simpson a fait , & dont George Campbell dir être l'Auteur , on ne peut trouver la portée entière qu'en tâtonnant , ce qui coûte beaucoup de temps & de travail inutile : mais d'ailleurs cette méthode a encore d'autres défauts plus considérables ; sçavoir , qu'on ne peut point trouver la portée lorsque l'objet est au dessus ou au dessous de l'horison ; ce qui est cependant fort nécessaire , puisqu'il n'entre que très-rarement dans la pratique que l'objet soit placé exactement dans le niveau avec la batterie. De plus, lorsque la distance de l'objet est donnée , & que l'on veut sçavoir quel angle d'élévation il faut pour atteindre cet objet , on ne le sçauroit trouver par méthode.

On donne ici trois manières différentes de résoudre la plupart de ces problèmes : la première, par des suites infinies , lorsque l'origine des co-ordonnées est au commencement de la courbe où le mortier est placé , mais modifiées de manière qu'elles convergent dans tous les cas possibles : la seconde , par la méthode des différences , & on a eu soin d'insérer une petite table par le moyen de laquelle les opérations numériques sont beaucoup abrégées : la troisième est encore par des suites infinies , mais dont l'origine des co-ordonnées commence au sommet , ou le plus haut point de la courbe. On a donné des exemples numériques de l'une & l'autre manière , tant pour faire voir que l'une & l'autre mène au même but , que pour laisser la liberté de l'application au lecteur , selon qu'il le jugera à propos , étant certain qu'il peut y avoir des cas où l'une pourroit être plus aisée que l'autre.

Le Traité est terminé par quelques problèmes touchant les Pendules qui font leurs oscillations dans des cycloïdes , lorsque la résistance est comme le carré des vitesses , ou comme les vitesses simples ; pour confirmer ce que le Chevalier Newton a dit là-dessus dans le second Livre de ses Principes , sur quoi quelques Auteurs avoient cru qu'il s'étoit trompé.

PREMIERE PARTIE.

Du Mouvement dans un milieu sans résistance.

T H E O R E M E.

1. *LA fluxion de la vitesse d'un corps mis en mouvement par une force quelconque qui varie selon quelque loi, est à la fin d'un tems donné, comme le rectangle fait par cette force à la fin de ce tems & la fluxion du tems écoulé.*

Car il est clair que cette force imprime plus ou moins de vitesse au corps dans des tems égaux, selon qu'elle est plus grande ou moindre pendant ce tems; & comme l'action de la force sur le corps est continuelle, soit qu'il soit en mouvement ou en repos, par supposition, & que les effets sont proportionnels à leurs causes, il est évident que les degrés de vitesse imprimés à chaque instant, sont comme les causes qui les a produites, & la somme totale de tous les degrés de vitesse, ou la vitesse acquise pendant un tems donné, est comme la somme totale de tous les effets de la force motrice.

Fig. 1.

Si l'abscisse AP exprime donc le tems, & que AB soit à PM , comme la force au commencement du mouvement est à la force à la fin du tems AP , & si la courbe BM est le lieu du point M , l'espace $ABMP$, exprimera la somme de tous les efforts de la force pendant le tems AP , & par conséquent la vitesse acquise dans ce tems. Or comme la fluxion de cet espace est égal au rectangle fait par l'appliquée PM , & la fluxion de l'abscisse AP , la fluxion de la vitesse du corps sera comme le rectangle fait par la force, & la fluxion du tems écoulé.

T H E O R E M E.

2. *La fluxion de l'espace parcouru par un corps avec une vitesse quelconque qui varie selon quelque loi donnée, est comme le rectangle fait par la vitesse à la fin du tems, & la fluxion du tems écoulé.*

Car il est clair que le corps parcourra des espaces plus ou moins grands dans des tems égaux, selon que cette vitesse est

plus ou moins grande dans ces tems. Or si l'on suppose le tems divisé en des momens ou instans égaux, les espaces parcourus dans chacun de ces instans, seront comme les vitesses, & la somme totale des espaces parcourus sera comme la somme totale des vitesses pendant ce tems.

Ainsi, si AB est à PM, comme la vitesse au commencement du mouvement est à la vitesse à la fin du tems AP, l'espace ABMP exprimera la somme de toutes les vitesses, & par conséquent l'espace parcouru pendant le tems AP. Par conséquent la fluxion de l'espace parcouru par un corps est comme le rectangle fait par la vitesse PM à la fin du tems, & la fluxion du tems écoulé AP.

COROLLAIRE I.

3. Delà il suit que si p exprime la force, v la vitesse acquise dans le t , & s l'espace parcouru, en supposant les quantités qui forment l'égalité entre les fluxions ci-dessus, égales à l'unité qu'on déterminera ci-après, on aura $\dot{v} = p t$ par l'article 1, & $\dot{s} = v t$ par l'article 2; & en multipliant les deux équations ensemble, afin de détruire t , on aura $p \dot{s} = v \dot{v}$, & si $\dot{t}$ est pris pour constant, la fluxion de l'égalité $\dot{s} = v t$, donnera $\ddot{s} = \dot{v} t$, laquelle étant multipliée par $\dot{v} = p t$, afin de détruire $\dot{v}$, donnera $\ddot{s} = p t \dot{t}$.

Voilà les équations qui servent à déterminer les loix du mouvement en général dans toutes sortes de cas, soit que p exprime la gravité des corps ou une force centripète, comme on verra dans la suite.

COROLLAIRE II.

4. Si l'on suppose la vitesse v constante, comme dans le mouvement uniforme, la ligne courbe BM devient une droite, comme FC dans la seconde figure, parallèle à AB; & la fluente de l'équation $\dot{s} = v t$, sera $s = v t$ égal au rectangle FB. Ce qui fait voir que les espaces parcourus uniformément avec la même vitesse, sont comme les tems écoulés depuis le commencement du mouvement; & les espaces parcourus avec des vitesses uniformes dans le même tems, comme les vitesses; & enfin lorsque les tems & les vitesses sont inégales, les espaces parcourus sont dans la raison composée des tems & des vitesses.

Fig. 2.

C O R O L L A I R E I I I .

5. Si la force p est constante, comme la gravité des corps proche la surface de la terre, la ligne courbe BM deviendra une ligne droite, comme AC , fig. 2, qui fait un angle donné avec la base AB , & rencontrera cette ligne au point A , si le corps commence son mouvement au point de repos : or les fluentes des équations $p t = v$, $p t = v v$, donnent $p t = v$, & $2 p s = v v$: ce qui fait voir que si la base AB d'un triangle exprime le tems, & la perpendiculaire BC la vitesse, & si d'un point D quelconque dans la base, on tire DE parallèle à BC , le tems AB sera au tems AD , comme la vitesse BC , à la fin du tems AB est à la vitesse DE , à la fin du tems AD . Et comme $2 p s = v v$, les espaces parcourus ADE , ABC , sont comme les quarrés des vitesses BC & DE , ou comme les quarrés des tems AB & AD .

C O R O L L A I R E I V .

6. Il est manifeste que l'espace parcouru par un corps qui tombe du point de repos, est la moitié de l'espace parcouru dans le même tems avec une vitesse uniforme, & égale à celle que le corps aura acquise en tombant. Car si AB exprime le tems, & BC la vitesse acquise en tombant, il est évident que l'espace parcouru avec une vitesse uniforme & égale à BC , sera exprimé par le rectangle BF , qui est double du triangle ABC , qui exprime l'espace parcouru en tombant.

C O R O L L A I R E V .

7. Si l'on suppose le tems t donné, & égal à l'unité, comme par exemple d'une seconde, l'équation $2 s = p t t$, donnera $2 s = p$, ce qui fait voir que les gravités des corps, dans différentes latitudes, sont comme le double des espaces parcourus dans une seconde, en tombant depuis le point de repos. Car il faut remarquer que quoiqu'on suppose communément que la gravité qui anime les corps est de même par toute la surface de la terre, elle diffère néanmoins dans différentes latitudes, comme l'expérience l'a fait voir : car on a trouvé que les Pendules à secondes sont plus courts vers l'équateur que vers les pôles ; ce qui ne pourroit être, à moins que la gravité ne soit moindre sous l'équateur qu'ailleurs, comme nous le ferons voir ci-après.

COROLLAIRE VI.

8. Si h exprime la hauteur de la chute dans une seconde de tems, dans une latitude donnée, on aura $2h = p$, par le dernier corollaire ; & comme $2sp = vv$, & $2s = 2ptt$, en mettant la valeur de p , on aura $4sh = vv$, & $s = tt h$, ou $\frac{s}{h} = tt$.

D'où l'on tire les deux

REGLES GENERALES.

I. *Pour trouver la distance qu'un corps peut parcourir uniformément dans une seconde de tems avec une vitesse donnée.*

Prenez le double de la racine quarrée du produit de la hauteur de la chute dans une seconde, depuis le point de repos, & celle que le corps doit avoir pour acquérir la vitesse donnée, & vous aurez la distance cherchée.

II. *Pour avoir le tems de la chute d'un corps exprimé en secondes.*

Divisez la hauteur de la chute par celle que le corps a dans une seconde depuis le point de repos, & la racine quarrée donnera le tems exprimé en secondes.

E X E M P L E.

9. Supposant qu'un corps tombe de la hauteur de 15. 0979 pieds de France dans la latitude de Paris, l'on demande l'espace que le corps parcourra uniformément dans une seconde, avec une vitesse acquise en tombant de la hauteur de 5280 pieds. On aura $h = 15. 0979$, $s = 5280$, & par conséquent la racine quarrée 282. 34, du produit 79716. 912, étant multipliée par 2, donnera 564. 68 pieds, que le corps parcourra dans une seconde avec cette vitesse uniformément continuée.

Pour avoir le tems que le corps a employé en tombant de la hauteur de 5280 pieds, cette hauteur étant divisée par (h) 15. 0979, donne 349. 72, dont la racine quarrée donne 18. 7 secondes, pour le tems que le corps a employé en tombant de la hauteur de 5280 pieds dans la latitude de Paris.

R E M A R Q U E.

Comme nous avons démontré les premiers principes des fluxions par le moyen des loix du mouvement, dans notre Traité

analytique, on pourroit dire que je suppose ce que je cherche; mais ce que je viens de dire du mouvement uniforme, qui est la seule partie du mouvement employé dans la démonstration des fluxions, n'est seulement que pour faire voir l'universalité des deux premiers theorèmes, & n'est nullement appliqué dans ce que nous dirons dans ce Traité-ci. D'ailleurs nous avons fait voir dans une addition au Traité analytique, que les principes des fluxions peuvent être démontrés sans les loix du mouvement: ainsi ceux qui ne seront point satisfaits de ce que nous venons de dire, peuvent regarder ce que nous avons dit dans le quatrième article, comme n'étant d'aucun usage.

P R O B L E M E G E N E R A L

POUR LES FORCES CENTRIPETES.

Fig. 3.

10. Si un corps jetté dans une direction donnée A E avec une vitesse donnée, est attiré vers un point fixe C, par une force P quelconque, dont la fonction est exprimée par les distances CM de ce point & des constantes, l'on demande la nature de la courbe A M décrite par ce corps.

Soient tirées C E, C S, perpendiculaires aux tangentes en A & M, & d'un point quelconque T dans la tangente en M, la ligne T R perpendiculaire au rayon C M. Cela posé, si $CM = y$, $CS = s$, & l'arc A M $= z$, on aura $MT = \dot{z}$, $MR = \dot{y}$, $TR = \dot{x}$; & si v exprime la vitesse en M, t le tems écoulé, on aura

* Art. 2.

* $\dot{z} = v t$.
Or comme la force P dans la direction C M, est à son effet dans la direction de la tangente M T, comme C M est à M S, ou à cause des triangles semblables C M S, T R M, comme T M est à M R, cet effet sera donc exprimé par $\frac{\dot{z}}{y} \times P$, & par consé-

* Art. 1.

quent $\times \frac{\dot{z}}{y} \times P \times t = \dot{v}$, ou en mettant la valeur de t prise dans $\dot{z} = v t$, on aura $P \dot{y} = v \dot{v}$.

La force P dans la direction C M est à son effet dans la direction C S perpendiculaire à la tangente M T, comme C M est à C S; cet effet sera donc exprimé par $\frac{s}{y} P$: mais cette force doit être appliquée à l'extrémité T du levier M T, ou de $\dot{z}$; & comme le rayon M S est au rayon M T, comme la fluxion $\dot{z}$ de l'arc décrit par le rayon M S, est à la fluxion de l'arc décrit par le rayon M T, ou à l'espace décrit par la force dans la direction

perpendiculaire à la tangente MT, & que CM:MS::MT:MR, on aura $\frac{y}{x} = MS$; & MS:MT, ou $\frac{y}{x} : z :: z : \frac{z^2}{y} =$ à l'espace décrit par la force dans la direction CS. Or comme cet espace est décrit dans le même tems que z , il doit être une seconde fluxion à l'égard de z , ainsi $* \frac{1}{y} P \times z \dot{z} = \frac{z^2 \dot{z}}{y^2}$, ou en $* Ann. 3.$ mettant la valeur de $\dot{z}$ prise dans $z = v \dot{z}$, on aura $P s \dot{y} = \dot{z} v v$. Par conséquent la fonction de la force P étant exprimée par les distances y & des constantes, on trouvera la valeur de $v v$, par le moyen de l'équation $P \dot{y} = v \dot{z}$, laquelle étant comparée avec celle dans l'équation $P s \dot{y} = \dot{z} v v$, donnera l'équation de la courbe chetchée, comme on verra ci-après.

REMARQUES.

I. Lorsque y & $\dot{z}$, ou ce qui revient au même, lorsque y & v augmentent, ou diminuent ensemble, on aura toujours $P \dot{y} = v \dot{z}$; mais si l'une de ces quantités augmente pendant que l'autre diminue, on aura $- P \dot{y} = v \dot{z}$.

II. Lorsque y & $\dot{z}$, ou y & s augmentent ensemble, on aura toujours $P s \dot{y} = \dot{z} v v$; mais si l'une de ces quantités augmente pendant que l'autre diminue, on aura $- P s \dot{y} = \dot{z} v v$.

III. Enfin l'équation $P \dot{y} = v \dot{z}$ fait voir que les vitesses sont toujours égales à des distances égales du centre C au corps, quelque figure que le corps puisse décrire, soit une ligne droite ou courbe.

Il est nécessaire de se souvenir de ces remarques dans la suite, autrement les expressions des vitesses & des tems ne seront pas celles que l'on cherche, & l'équation de la courbe ne sera pas celle que l'on demande.

COROLLAIRE I.

II. Puisque $P s \dot{y} = \dot{z} v v$, & $P \dot{y} = v \dot{z}$, dans la figure présente, la dernière égalité étant multipliée par la première, afin de détruire P, donnera $- s \dot{z} = v \dot{z}$, ou $v \dot{z} + s \dot{z} = 0$, dont la fluente est $vs = A$. Or si $CE = d$, lorsque v devient égale à la vitesse donnée c , on aura $s = d$: partant $dc = A$, dans ce cas; & par conséquent l'équation $vs = A$, deviendra $vs = cd$. Ce qui fait voir que les vitesses v sont partout réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires CS, CE, tirées du centre C aux

tangentes qui passent par le centre du corps, quelle que puisse être la force centripète P.

COROLLAIRE II.

12. Comme $\dot{z} = v \dot{t}$, & $vs = c d$, on aura $s \dot{z} = c d \dot{t}$, en multipliant également, & comme $CM : CS :: TM : TR$, ou $y \dot{z} = s \dot{z}$; en mettant cette valeur de $s \dot{z}$ dans la dernière équation, on aura $y \dot{z} = c d \dot{t}$. Mais $y \dot{x}$ est la fluxion d'un espace double de CAM, il viendra donc $2CAM = c dt$. Ce qui fait voir que les tems sont toujours comme les espaces décrits par le rayon CM tiré du point fixe C au centre du corps, quelle que puisse être la force centripète P.

COROLLAIRE III.

13. Si l'on suppose que le centre C s'éloigne du sommet A à une distance infinie, de sorte que les directions CM, CA, de la force P, deviennent infinies & égales, en nommant CA = a , & le rayon étant au sinus de l'angle CAE, comme l'unité est à k , on aura $y = a$ dans ce cas, & $d = ak$; & comme $s \dot{z} = \dot{x} y$ devient ici $s \dot{z} = a \dot{x}$, ou $= \frac{a \dot{x}}{k}$; en supposant $\dot{x}$ constante, la fluxion de cette égalité sera $\dot{z} = \frac{a \dot{x}}{k}$. Les valeurs de s & de $\dot{z}$ étant substituées dans les équations $s \dot{z} = c d \dot{t}$, $ve = c d$, & $Ps \dot{y} = \dot{z} v v$, elles deviendront $\dot{x} = ck \dot{z}$, ou $x = ckt$, $\dot{x} v = ck \dot{z}$, & $-P \dot{y} \dot{z} = v v \dot{z}$, ou $P \dot{y} \dot{z} + v v \dot{z} = 0$, parce que $\dot{y} \dot{y} = \dot{z} \dot{z}$, lorsque $\dot{x}$ est constante.

Comme les déductions qu'on vient de faire dans ce dernier corollaire, peuvent paroître un peu obscures à quelques lecteurs, par rapport à l'expression *infinie* dont on s'est servi, on va démontrer la même chose dans le problème suivant, afin de ne rien omettre de ce qui pourroit paroître nécessaire aux commençans, & qui peut éclaircir le sujet.

P R O B L E M E.

Fig. 4.

14. Si un corps jeté du point A dans la direction AE, donnée avec une vitesse donnée c , est partout poussé ou attiré par une force quelconque P dans des directions parallèles, l'on demande la nature de la courbe décrite par ce corps.

Soit AB perpendiculaire aux directions PM de la force P, & d'un

d'un point quelconque T dans la tangente en M, soit tirée TR perpendiculaire à PM, & enfin du point R, la ligne RS perpendiculaire à MT : cela posé, si $AP = x$, $PM = y$, l'arc $AM = z$, on aura $TM = z$, $MR = y$, & $TR = x$.

Puisque la force P dans la direction PM est à son effet dans la direction de la tangente MT, comme RM est à MS, ou à cause des triangles semblables RSM, TRM ; comme MT est à MR ; cet effet sera exprimé par $\frac{z}{x}P$, & par conséquent $\frac{z}{x}P \times \text{Art. 1.}$
 $\dot{x} = -\dot{v}$, ou $-P\dot{y} = v\dot{v}$, parce que $\dot{z} = v\dot{x}$.

La force P dans la direction PM, est à son effet dans la direction RS perpendiculaire à la tangente, comme MR est à RS, ou comme MT est à RT, (cet effet sera exprimé par $\frac{x}{r}P$). Or comme cet effet retient le corps dans la courbe, & l'empêche de suivre la direction de la tangente, il doit être appliqué à l'extrémité de la fluxion MT de la courbe ; ainsi en nommant r le rayon de courbure en M, on aura, à cause de l'angle droit que ce rayon fait avec la tangente, le rayon r est au rayon MT, comme la fluxion $\dot{z}$ de l'arc décrit par le rayon r est à la fluxion $\frac{\dot{x}}{r}$ de l'arc décrit par le rayon MT, ou l'espace décrit par la force $\frac{\dot{x}}{x}$; & comme cet espace est décrit en même tems que la fluxion $\dot{z}$, il doit être une seconde fluxion à l'égard de $\dot{z}$. Donc $\frac{\dot{x}}{x}P \times \dot{x} = \frac{\dot{x}^2}{r}$, ou $P\dot{x}r = v\dot{v}\dot{z}$, parce que $\dot{z} = v\dot{x}$. Mais * Art. 3.
 lorsque $\dot{x}$ est constante, on aura $\frac{\dot{x}^2}{x} = r$; cette valeur étant * Art. 194.
 mise dans la dernière équation, donnera $-P\dot{y}\dot{z} = v\dot{v}\dot{z}$, ce qui est précisément la même équation, aussi-bien que $-P\dot{y} = v\dot{v}$, que celles que nous avons trouvée dans le dernier corollaire.

COROLLAIRE I.

15. Si l'équation $-P\dot{y}\dot{z} = v\dot{v}\dot{z}$ est multipliée par l'équation $P\dot{y} = v\dot{v}$, afin de détruire P, on aura $\dot{z}\dot{v} = v\dot{z}$, ou $\dot{z}\dot{v} - v\dot{z} = 0$, dont la fluente est $\frac{v}{k} = A$, ou à cause que $\dot{x}$ est constante, cette fluente doit être $\frac{v\dot{x}}{k} = A$. Or si le rayon est au sinus de l'angle d'élévation PAE, comme l'unité est à k, lorsque la vitesse v devient la vitesse projectile c, on a $\dot{z} : \dot{x} :: 1 : k$, ou $k\dot{z}$

T t

$= \dot{x}$; cette valeur de $\dot{x}$ étant substituée dans $\frac{v \dot{z}}{k} = A$, donnera $c k = A$; & en mettant cette valeur de A dans la même équation, on aura $v \dot{x} = c k \dot{z}$. Et en mettant la valeur de v prise dans $\dot{z} = v t$, dans la dernière équation on aura $\dot{x} = c k t$, dont la fluente est $x = c k t$, ce qui donne encore les mêmes équations que ci-dessus.

C O R O L L A I R E I I.

16. Puisque $\dot{x} v = c k \dot{z}$, on aura au sommet D, ou $\dot{z} = \dot{x}$, $v = c k$, pour la vitesse en ce point. D'où il suit, que si un corps est jeté du point A avec une vitesse, & une autre du sommet D dans une direction horizontale, en sorte que ces deux corps décrivent le même arc D K, il faut que la vitesse du premier soit à la vitesse du second, comme le rayon est au sinus k de l'angle de projection P A E.

Et comme $x = c k t$, lorsque t exprime le tems de la description de la courbe entière A D K, laquelle est double de la partie D M, dans un milieu sans résistance, il faut diviser t par 2, ou multiplier son égal par 2, pour avoir $2 x = c k t$, lorsque le corps est jeté de D, ou $2 x = c t$, lorsque c exprime la vitesse au sommet D.

On peut déduire la même chose de l'expression $2 C A M = c d t$; car lorsque les directions sont parallèles, on a $x = y$, & $y \dot{x} = a \dot{x}$; donc $C A M = a x$, & $2 x = c t$, parce que $d = a$, par supposition.

C O R O L L A I R E I I I.

17. En quarrant l'équation $\dot{x} v = c k \dot{z}$, on a $\dot{x}^2 v^2 = c c k k \dot{z}^2$, ou à cause que $\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, il viendra $\dot{x}^2 v^2 = c c k k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, d'où l'on tire $c k \dot{y} = \dot{x} \sqrt{v v - c c k k}$, pour l'équation générale de la courbe, lorsque les directions de la force P sont parallèles, laquelle exprimera le rapport entre les abscisses & appliquées correspondantes, lorsque la force P est donnée, parce que le rapport des vitesses c & v sera donné aussi.

E X E M P L E.

18. Soit la force P constante & égale à p , on aura $-p \dot{y} = v \dot{v}$, * dont la fluente est $A - 2 p y = v v$, & au point A, ou

$v=c$, y sera $=0$, ce qui donne $A=cc$, & par conséquent $cc-2py=vv$: cette valeur de vv étant mise dans l'équation générale, donne $ck\dot{y}=x\sqrt{ccll-2py}$, en supposant l le cosinus de l'angle PAE , ou $1-kk=ll$, dont la fluente est $Ap-ck\sqrt{ccll-2py}=px$: or au point A , $y=x=0$, donc $Ap=ckl$, par conséquent $ckl-ck\sqrt{ccll-2py}=px$, sera l'équation de la courbe cherchée.

COROLLAIRE IV.

19. Si h exprime la hauteur d'où un corps doit tomber pour acquérir la vitesse c , on aura $* 2ph=cc$; par conséquent, si la quantité sous le signe est mise dans un membre de l'équation, & les autres termes dans l'autre, & que l'on mette au lieu de cc sa valeur dans le quarré de l'équation, on aura $4hkk\dot{y}=4hklx-xx$, après la réduction faite pour l'équation de la courbe, laquelle est la parabole ordinaire. * Art. 5.

COROLLAIRE V.

20. En faisant $y=0$, dans la dernière équation, on aura $AK=x=4hkl$, ce qui fait voir que les portées horizontales, tirées avec la même charge $2h$, sont entr'elles comme le sinus $2kl$ des angles doubles de ceux des élévations; & les portées, tirées sous un même angle d'élévation, sont comme les hauteurs h , desquelles un corps doit tomber pour acquérir les vitesses de projection.

COROLLAIRE VI.

21. En faisant $y=0$, on aura $AB=x=2hkl$, pour l'abscisse qui correspond à la plus grande appliquée BD , & qui par conséquent est la moitié de la partie horizontale, & l'appliquée $BD=hll$. La troisième proportionnelle à BD & AB , donne $4hkk$ pour le paramètre de l'axe BD ; & si F est le foyer, on a $DF=hkk$, par la nature de la parabole, de même $AF=BD+DF=h$, parce que $ll+kk=1$, & $AF-MP=FM=h-y$. Par conséquent $2p \times MF=vv$.

COROLLAIRE VII.

22. Delà il suit que si la hauteur h est un mille d'Angleterre;

T t ij

c'est-à-dire, si $h = 5280$ pieds Anglois, & l'angle d'élévation 45 degrés, on aura $l = k$, & $2kl = 1$; ainsi $AB = 2hkl = 5280$, $BD = DF = 2640$; & comme $x = ckt$, $x = 2h$, $c = \sqrt{2hp}$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura $2h = x\sqrt{hp}$; par conséquent, si $p = 32.2$, on trouvera le tems t , de 25.6 secondes, & la vitesse c au point D, telle qu'elle parcourra une espace de 412 pieds par secondes par un mouvement uniforme.

* Art. 25.

E X E M P L E.

Fig. 5.

23. Soit la courbe AME la cycloïde ordinaire, & ANB la moitié de son cercle générateur, dont la propriété est telle, qu'en tirant une perpendiculaire PM, à l'axe AB, la partie NM, terminée par le cercle & la courbe, est toujours égal à l'arc correspondant AN du cercle générateur; & par conséquent la base BE égale à la demi-circonférence. En faisant $AB = a$, $AP = y$, & que l'on suppose que le corps commence son mouvement

* Art. 5.

en E, par la gravité p , on aura $v = \sqrt{2ap - 2pq}$, pour la vitesse au point M, & $c = \sqrt{2ap}$, pour celle au point le plus bas

* Art. 6.

A; & comme $2x = ct$, il viendra $2x = t\sqrt{2ap}$, ou en quarrant $2xx = aptt$.

Or comme x exprime la moitié de la circonférence dans la description de la demi-cycloïde AE, elle exprimera la circonférence entière dans la description de la courbe entière; en faisant $r = 3.14159$, &c. on aura $ra = x$, ce qui donne $2arr = ptt$.

C O R O L L A I R E V I I I.

24. Puisque la longueur d'un Pendule qui décrit une cycloïde est double du diamètre de son cercle générateur, il est évident que cette longueur est comme la gravité p , dans un tems donné, & que les quarrés des tems, sont dans la raison directe des longueurs & de la gravité inverse. Par conséquent la longueur d'un Pendule à secondes étant donnée dans une latitude quelconque, la hauteur d'où un corps tombera dans une seconde sera aussi donnée.

E X E M P L E.

25. Le Chevalier Newton & le Docteur Halley ont fait des

expériences fur la longueur d'un Pendule à secondes dans la latitude de 51° , $32'$ Londres, & ils ont trouvé :

La longueur d'un Pendule $\left\{ \begin{array}{l} \text{à secondes} \left\{ \begin{array}{l} 39.125. \text{ Halley.} \\ 39.207. \text{ Newton.} \end{array} \right. \\ \text{à } \frac{1}{2} \text{ secondes} \left\{ \begin{array}{l} 9.781. \text{ Halley.} \\ 9.801. \text{ Newton.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

en pouces d'Angleterre ; & comme $r = 3.14159$, &c. on aura $rr = 9.8696$; & en mettant cette valeur dans $2arr = ptt$, il viendra $9.8696a = ptt$; en supposant que p exprime l'espace simple parcouru dans une seconde, & non pas double comme ci-devant.

Si à présent l'on fait $2a = 39.125$, & que le tems soit l'unité, on aura $p = 193.074$ pouces ; & si $2a = 39.207$, on trouvera $p = 193.4787$. Si à présent l'on suppose le tems d'une demi-seconde, on aura $39.4784a = p$, & si $2a = 9.781$, on aura $p = 193.0591$; & si $2a = 9.801$, on trouvera $p = 193.4639$; en prenant un milieu entre les quatre valeurs de p , on aura $p = 193.2689$ pouces, ou 16.1057 pieds d'Angleterre, pour la hauteur de la chute dans une seconde, dans la latitude de 51° , $32'$.

Comme la longueur d'un Pendule à secondes, dans la latitude de 40° , $50'$ de Paris, est de $440\frac{17}{10}$ lignes, suivant les observations de M. de Mairan ; en faisant $2a = 440\frac{17}{10}$, l'équation $9.8696a = p$, donnera $p = 2174.1084$ lignes, ou 15.0979 pieds pour la hauteur tombée à Paris.

Pour avoir le rapport entre la gravité dans les latitudes de Londres & de Paris, il faut réduire la mesure d'Angleterre à celle de Paris, qui sont comme 114 à 107 , selon les dernières expériences faites par les Messieurs de l'Académie Royale des Sciences à Paris, & ceux de la Société Royale de Londres, ce qui donne 15.1167 pieds de France pour la hauteur de la chute à Londres dans une seconde de tems. Par conséquent la gravité à Londres est à la gravité à Paris, comme 15.1167 est à 15.0979 , ou comme 804 est à 803 , ou bien comme 100000 est à 100124 .

R E M A R Q U E.

Il faut observer qu'un Pendule parcourt un arc quelconque de la cycloïde dans le même tems qu'il parcourt toute la cycloïde. Car si $AP = d$, & que y exprime une partie du diamètre moindre que AP , on aura $v = \sqrt{2pd - 2py}$, & comme

* Art. 2. $\dot{z} = \frac{ay}{\sqrt{ay}}$ par la propriété de la cycloïde, l'équation * $\dot{z} = vt$, donne $\frac{ay}{\sqrt{ay}} = t \sqrt{2ap}$. Or comme $\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{ay}}$ exprime la fluxion d'un arc de cercle x , dont le diamètre est d , & l'abscisse y , on aura $\frac{1}{2} \frac{dx}{d} = t \sqrt{2ap}$; & lorsque $y = 0$, on aura $x = dr$, & ainfi $2ar = t \sqrt{2ap}$, ou en quarrant $4arr = ptt$, comme ci-dessus.

E X E M P L E I.

Fig. 6.

26. Soit la courbe AM la parabole ordinaire, le point fixe C le foyer, l'on demande la valeur de la force centripète P, telle que le corps puisse décrire cette courbe.

Soit la distance AC = a , du sommet au foyer, CM = y , CT = s , comme ci-devant, on aura $s = \sqrt{ay}$, par la propriété de la parabole; en mettant cette valeur de s dans * $vs = cd$, on aura $v\sqrt{ay} = ac$, parce que d est ici = a , ou $vv = \frac{ac^2}{y}$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{ac\dot{c}}{y^2}$; & cette valeur étant mise dans * $-P\dot{y} = v\dot{v}$, donne $P = \frac{ac^2}{y^2}$. Ce qui fait voir que cette force doit être réciproquement comme le quarré des distances du foyer au corps.

E X E M P L E II.

Fig. 7.

27. Soit la courbe une ellipse, & le point fixe C un de ses foyers, l'on demande la valeur de la force centripète P.

Soient a & b , les demi-premier & second axes, on aura CT = $s = \frac{b^2}{\sqrt{2ay - y^2}}$, par la propriété de l'ellipse; cette valeur étant mise dans l'équation * $vs = cd$, donne $cd\sqrt{2ay - y^2} = byv$, ou en quarrant $vv = \frac{ddcc}{bb} \times \frac{2a - y}{y}$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{addcc\dot{c}}{bb^2y}$; par conséquent $-P\dot{y} = v\dot{v}$, donnera $P = \frac{addcc}{bb^2y}$. Ce qui fait voir que cette force est réciproquement comme le quarré des distances du foyer au corps.

On trouve la même valeur de P qu'ici, lorsque la courbe est

une hyperbole, mais négative; ce qui fait voir que cette force devient centrifuge dans ce cas.

COROLLAIRE IX.

28. Si l'on fait $v = 0$, l'équation $cd\sqrt{2ay - yy} = byv$, donnera $2a = y$, ce qui montre que si l'on prolonge le premier axe Aa , du côté du foyer opposé F , en sorte que $AG = AF$, le point G sera tel qu'à la distance CG , la vitesse v sera nulle. L'on voit aussi que la vitesse en a sera la plus grande qu'il est possible, puisqu'elle est partout réciproquement comme les distances CS , ou Ca .

E X E M P L E.

29. Soit la courbe encore une ellipse, & le point fixe C son centre, en tirant le diamètre CD parallèle à la tangente MT , la somme des carrés de CM & de CD , sera égale à la somme des axes CA & CB ; en faisant $aa + bb = rr$, on aura $CD = \sqrt{rr - yy}$; mais le rectangle ab des demi-axes est égal au rectangle $CD \times CT$, par la propriété de l'ellipse, ce qui donne $ab = s\sqrt{rr - yy}$; cette valeur de s étant mise dans $*vs = cd$, donnera $c\sqrt{rr - yy} = bc$, parce que d ici égal a , d'où l'on tire $vv = \frac{c^2}{b^2} \times rr - yy$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{c^2\dot{y}}{b^2}$. Par conséquent $-P\dot{y} = v\dot{v}$, devient $P = \frac{c^2\dot{y}}{b^2}$; ce qui fait voir que la force P est comme les distances CM .

COROLLAIRE X.

30. Lorsque l'ellipse devient un cercle, b & y deviennent égales à a , ainsi $aP = cc$. D'où l'on voit que la force P est comme le carré de la vitesse directe, & l'inverse du rayon.

Comme on a trouvé par expérience que la gravité agit universellement comme la quantité de matière directe, & le carré des distances inverses, on voit que les orbes des planètes doivent être des ellipses, parce que l'ellipse paroît être la seule courbe qui rentre en elle-même qui a cette propriété; mais on n'est pas satisfait de ce qu'elle a cette propriété, parce que l'on ne sçait pas s'il n'y a point d'autres courbes qui aient la même. C'est

pourquoi nous allons chercher quelle doit être la courbe, lorsque la force centripète est telle que l'expérience le demande.

P R O B L E M E.

Fig. 7.

31. La force centripète P étant partout réciproquement comme les quarrés des distances CM , l'on demande la nature de la courbe.

Puisque P est comme $\frac{1}{yy}$, l'équation $-Pj = v\dot{v}$, devient $-\frac{\dot{v}}{yy} = v\dot{v}$, dont la fluente est $2A + \frac{v^2}{y} = vv$. Or si l'on suppose que $2a$ exprime la distance du point C au point où la vitesse v devient nulle, on aura $-A = \frac{1}{2a}$, & par conséquent $2A + \frac{v^2}{y} = vv$, devient $\frac{v^2}{y} - \frac{1}{a} = vv$, ou $2a - y = ayvv$. Si l'on fait $CA = a + d$, & que la tangente fasse un angle droit avec CA , lorsque $v = c$, y sera $a + d$; & ainsi $2a - y = ayvv$, donne $a - d = acc \times a + d$. Or comme $*vs = c \times \frac{a}{a+d}$, ou $vvss = cc \times \frac{a^2}{a+d^2}$, en mettant les valeurs de vv & de cc dans cette dernière équation, on trouvera $\frac{2a-y}{y} \times ss = y \times \frac{aa-dd}{aa}$, ou en faisant $aa - dd = bb$, on aura $s\sqrt{2ay - yy} = by$, pour l'équation de la courbe demandée, laquelle sera une section conique, dont le point fixe C est un de ses foyers.

* Art. 11.

1°. Lorsque $d = 0$, c'est-à-dire, $CA = AG$, la courbe sera la parabole ordinaire.

2°. Lorsque d est moindre que a , elle sera une ellipse.

3°. Et lorsque d est plus grand que a , une hyperbole; mais comme le carré de la vitesse c devient ici négatif, la force P devient centrifuge.

De là on voit clairement que les orbites des corps célestes qui tournent autour des autres, ne peuvent être que des ellipses, puisqu'il n'y peut point avoir d'autre courbe qui ait cette propriété: tous les Philosophes en conviennent à présent; c'est pourquoi il n'y a point d'autre système du monde qui soit suivi que celui de Kepler, lequel est fondé sur cette propriété.

C O R O L L A I R E I.

32. De là il suit que si f exprime la distance du point C au point où la force P devient égale à la gravité p , proche la surface de

de la planete, on aura $P = \frac{tff}{33}$, & comme $*P = \frac{addcc}{6633}$, on aura * Art. 17.

$addcc = bbfpp$, ou $ed = bf\sqrt{\frac{t}{a}}$, cette valeur étant mise dans

$vs = cd$, & $* 2CAM = cdt$, donne $vs = fb\sqrt{\frac{t}{a}}$, & $2CAM$ * Art. 111

$$= bft\sqrt{\frac{t}{a}}.$$

Or si T exprime le tems d'une révolution entiere, & $r = 3$. 14159, on aura $abr = CAM$; & en mettant cette valeur, &

T pour t , on aura $2ar = Tf\sqrt{\frac{t}{a}}$, ou en quarrant $4rra = pffTT$.

COROLLAIRE II.

33. De là il suit que les tems périodiques dans les ellipses qui ont le même premier axe, sont égaux, depuis la plus petite jusqu'au cercle, quel que puisse être leur second axe, & les quarrés des tems périodiques des corps qui tournent autour du même centre, sont comme les cubes de leurs distances moyennes, ou axes; car p & f sont constans dans ce cas.

COROLLAIRE III.

34. Puisque $*P = \frac{cc}{a}$, dans le cercle, & que $2CAM = cdt$, est * Art. 304

$2ra = cdt$, dans une révolution entiere, on aura $P = \frac{4rra}{11}$. Ce qui fait voir, que si les tems périodiques sont égaux, les forces centrifuges ou centripetes, sont comme les rayons des cercles. Que si les tems sont differens dans des cercles égaux, les forces centrifuges seront réciproquement comme les quarrés des tems périodiques, & dans des cercles differens, les forces sont comme les rayons directs & les quarrés des tems inverses; & comme $2ra = ct$, les vitesses sont comme les rayons directs, & les tems périodiques inverses.

COROLLAIRE IV.

35. Puisque $* = \frac{acc}{33}$, dans la parabole, & $*P = \frac{ff}{33}$, on aura * Art. 18.

$cc = \frac{vff}{a}$, ou en mettant cette valeur de cc dans $*vvs =$ * Art. 32.

$ccdd$, & a pour d , il viendra $vvs = 2apff$, & comme $*ay$ * Art. 161

Vu

= s par la propriété de la parabole, la dernière équation deviendra $vvy = 2pff$, ou $v = f\sqrt{\frac{1}{y}}$. Delà il suit.

1°. Que la vitesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la moitié du premier arc d'une ellipse, est à la vitesse d'un corps qui tourne dans l'ellipse autour du même centre, comme $*f\sqrt{\frac{1}{a}}$ est à $\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{1}{a}}$, ou comme s est à b , parce que s devient égale à b , dans le cercle.

2°. La vitesse d'un corps qui tourne dans une ellipse à sa distance moyenne, est égale à la vitesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la même distance, parce que $b = s$, dans ce cas.

3°. La vitesse d'un corps qui tourne dans la parabole, est égale à la vitesse d'un corps qui tourne dans un cercle à la moitié de cette distance. Car si $\frac{1}{2}y = a$, la vitesse dans la parabole $v = f\sqrt{\frac{1}{y}}$, deviendra $v = f\sqrt{\frac{1}{a}}$, de même que dans un cercle dont le rayon est a .

R E M A R Q U E.

La parallaxe horizontale du soleil a été trouvée de $10\frac{1}{2}''$ par les meilleures observations : or la tangente de cet angle, qui est 50905436, est au rayon 100000,00000,00, comme le rayon de la terre, qui est de 19644 rayons de la terre. Mais si cette parallaxe n'étoit que de $10''$, la distance moyenne de la terre au soleil seroit de 22688, ce qui surpasse la première de 3044 rayons. D'où l'on voit l'importance d'avoir cette parallaxe le plus exactement qu'il soit possible.

Comme dans l'équation $2rat = fTpt$, pour avoir la valeur de f , il faut que p exprime le double de la hauteur de la chute dans un jour, puisque les tems T sont exprimés en jours, & de plus p doit être exprimé en rayon de la terre, puisque a est ainsi exprimé : or comme les tems sont * comme les racines quarrées double des hauteurs de la chute, la hauteur de la chute dans une seconde dans la latitude de Paris, étant de 15.095 pieds, & 86400 exprimant le nombre des secondes dans un jour, on trouvera $pt = 474739.1414$, de pieds; & comme le rayon de la terre est, selon M. Picard, de 19615800 pieds, dont la racine quarrée est 4428.9727, ainsi en divisant la valeur de pt , par cette

* Art. 5.

racine, on aura $pt = 107.18944$ exprimé en rayons de la terre. Cette valeur & celle de $2r$, qui est de 6.28318 , dans l'équation $2rat = fTpt$, donnera $fT 0.058817 \times at$. D'où l'on voit que si deux de ces quantités f , T , a , sont données la troisième le sera aussi.

Temps périodiques.

Saturn.	Jupiter.	Mars.	Terre.	Venus.	Mercur.
10759.275	4332.514	686.9785	365.2565	224.6176	67.9692

Si l'on met la valeur de T & de a , c'est-à-dire, 365.2565 , dans l'équation ci-dessus, on aura $f = 441.8455877$, & $ff = 195227$. D'où en mettant la valeur de f , dans l'équation, on aura $T \times 7537.8403 = at$.

Cette dernière équation exprime le rapport entre le temps périodique & la distance moyenne d'une planète quelconque, qui tourne autour du soleil; car il faut remarquer que la valeur de f change lorsque le corps qui occupe le centre change.

En mettant la valeur de T dans la dernière équation prise ci-dessus, on aura les distances moyennes des planètes exprimées en rayons de la terre.

Distances moyennes.

Saturn.	Jupiter.	Mars.	Terre.	Venus.	Mercur.
187364	102170	29931	19644	14205	7604

La distance moyenne de la lune à la terre, est de 60.11 rayons de la terre. Or les diamètres apparens des planètes étant connues, on trouvera leurs diamètres véritables comme ci-dessous.

Diamètres des Planètes.

Sol.	Sat.	Jupit.	Mars.	Terre.	Ven.	Mer.	Lune.
92	7.267	9.1633	0.5226	1	1.033	0.3686	0.27

Car le diamètre apparent du soleil est de $32' : 12'' = 1932''$, lorsque le diamètre f apparent de la terre est $21''$, c'est-à-dire, double de la parallaxe horizontale du soleil: donc le diamètre du soleil est au diamètre de la terre, comme 1932 est à 21 , ou comme 92 est à l'unité.

Un Observateur placé dans le soleil verroit Saturne sous un angle de $16''$, à la distance moyenne, ou sous un angle de $\frac{187364}{396444} \times 16'' = 152.6076''$, à la distance moyenne de la terre; ainsi le diamètre du soleil est au diamètre de Saturne, comme 1932 est à 152.6076 , ou comme 92 est à 7.267 .

Vu ij

Jupiter seroit vu du soleil sous un angle de $37''$ à sa distance moyenne, & sous un angle de $\frac{103170}{19644} \times 37'' = 192.4399''$ à la distance moyenne de la terre : donc le diamètre du soleil est au diamètre de Jupiter, comme 1932 est à 192.4399, ou comme 92 est à 9.1638.

Mars seroit vu du soleil sous un angle de $30''$, lorsque sa distance à la terre est à sa distance moyenne de la terre, comme 15 est à 41, & par conséquent sous un angle de $\frac{11}{41} \times 30'' = 10.9756''$, à la distance moyenne de la terre, par conséquent le diamètre du soleil est au diamètre de Mars, comme 1932 est à 10.9756, ou comme 92 est à 0.5226.

Venus seroit vu du soleil sous un angle de $30''$ à sa distance moyenne, & sous un angle de $\frac{14301}{19644} \times 30'' = 21.6936''$, à la distance moyenne de la terre : donc le diamètre du soleil est au diamètre de Venus, comme 1932 est à 21.6936, ou comme 92 est à 1.033.

Mercure seroit vu du soleil sous un angle de $20''$ à la distance moyenne, & sous un angle de $\frac{7104}{19644} \times 20'' = 7.741''$, ainsi le diamètre du soleil est au diamètre de Mercure, comme 1932 est à 7.741, ou comme 92 est à 0.3686.

Enfin le diamètre de la lune paroît être de $15' : 38'' = 938''$, lorsque sa parallaxe est de $57' : 12'' = 3432''$. Par conséquent le diamètre de la terre est au diamètre de la lune, comme 3432 est à 938, ou comme l'unité à 0.27.

Les solides semblables étant comme les cubes de leurs diamètres, en supposant les planetes semblables, on aura pour leurs

Solidités.

Sol.	Sat.	Jupit.	Mars.	Terre.	Ven.	Mer.	Lune.
778688	383	765	769	532	0.14226	1	1.1023
0.5	0.01968						

D'où l'on voit que Venus est à peu près égale à la terre, Mercure la moitié, Jupiter plus grand que toutes les autres Planetes ensemble, & le soleil presque un million de fois plus grand que la terre.

Si à présent on suppose que Saturne occupe le centre des forces ; le tems périodique du Satellite découvert par M. Hùgens étant de 15.945 jours, & sa distance au centre de Saturne de huit demi-diamètres de son anneau ; le diamètre de l'anneau étant au diamètre de Saturne, comme $41''$ est à $18''$, c'est-à-dire, comme 7 est à 3 ; ainsi cette distance sera $\frac{7 \times 8}{3} = \frac{16}{3}$ demi-

diametres de Saturne, ou parce que ce diametre contient 7. 267 diametres de la terre, elle sera $\frac{7.267}{2} \times \frac{16}{1} = 67.8253$ diametres de la terre.

Si donc on fait $T = 15.945$, $a = 67.8253$, on trouvera que $Tf = 0.058617 \times a^2$, donc $f = 2.053355$, & $ff = 4.216$. Cette valeur de f étant mise dans $Tf = 0.058617 \times a^2$, donnera $T \times 35.03 = a^2$.

Temps périodiques des satellites de Saturne.

1. 888 : 2. 737 : 4. 577 : 15. 945 : 79. 325 jours.

Par le moyen des tems périodiques & de la dernière équation, on trouvera les distances moyennes comme ci-dessous, exprimés en rayons de la terre.

Distances moyennes des satellites de Saturne.

16. 344 : 20. 9356 : 29. 236 : 67. 8253 : 197. 522.

Si c'est Jupiter qui occupe le centre, le tems périodique du Satellite le plus éloigné étant de 16. 6889 jours, & sa distance moyenne de 24. 299 demi-diametres de Jupiter, le diametre de Jupiter contient 115. 917488 rayons de la terre. Donc faisant $T = 16.6889$, & $a = 115.917488$, on aura $a^2 = 1248.0254$, & par conséquent l'équation $Tf = 0.058617 \times a^2$, donnera $f = 4.3834$, ou $ff = 19.214$. Cette valeur de f étant mise dans $Tf = 0.058617 \times a^2$, donne $T \times 74.7803 = a^2$, ou bien $T^2 \times 17.749 a$.

Temps périodiques des satellites de Jupiter.

1. 76914 : 3. 5508 : 7. 154 : 16. 6889.

Par le moyen des tems périodiques & de la dernière équation, on trouvera les distances moyennes de ces satellites en rayons de la terre.

Distances moyennes des satellites de Jupiter.

25. 949 : 41. 302 : 65. 990 : 115. 917.

Si P exprime la force absolue avec laquelle une planete attire les corps, & que g soit celle qui est proche de la surface de la terre: puisque f exprime la distance où la force centripete est égale ag , on aura $P = gff$, ou $g : P :: 1 :: f f$; donc les

valeurs trouvées pour ff , exprimeront le rapport entre les forces absolues des planetes qui occupent le centre à celle de la terre supposée l'unité.

Gravité absolue du

Soleil.	Saturne.	Jupiter.	Terre.
195227	: 4.216	: 19.214	: 1.

Les poids des corps égaux placés sur les surfaces des planetes, sont comme les forces attractives des planetes; ainsi si y exprime le rayon d'une planete, & que l'on mette la valeur de ff , trouvée pour cette planete dans $P = \frac{ff}{y^2}$, on aura les poids P placés sur leur surface.

Gravité des corps placés sur les surfaces du

Soleil.	Saturne.	Jupiter.	Terre.
922625	: 3193	: 9154	: 1000.

Or la quantité de matiere exprimée par ff , est aussi égale à la densité D , & au volume ensemble; & comme les volumes sont comme les cubes des rayons dans les solides semblables, on aura $Dy^3 = ff$; d'où en mettant cette valeur dans $P = \frac{ff}{y^2}$, on aura $P = Dy$, ou $D = \frac{P}{y}$; par conséquent en mettant au lieu de P & de y , leurs valeurs trouvées ci-devant, on aura pour les

Densités du

Soleil.	Saturne.	Jupiter.	Terre.
25071	: 1098	: 2497	: 100000.

Il faut remarquer que l'on n'a pas encore trouvé le moyen d'avoir la gravité ni la densité des planetes qui n'ont point des satelites ou corps qui tournent autour d'eux.

Voilà à peu près l'application la plus utile que nous avons cru faire de nos principes, en ce qui regarde l'Astronomie: nous en aurions pu donner plusieurs autres sur les différentes hypotheses qu'on peut faire à l'égard de la force centripete; mais comme cela auroit plutôt fatigué le lecteur, au lieu de l'instruire, on a cru qu'il vaudroit mieux s'attacher seulement à ce qui est utile.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

THEOREME I.

36. Soit un amas de matiere uniforme dont les parties sont détachées les unes des autres, & qui sont attirées vers un centre ou point fixé C, avec des forces égales à des distances égales : je dis que cet amas formera une sphere AMDa. Fig. 9.

Car il est clair que les parties de cette matiere les plus proches du centre C, s'approcheront de ce point autant qu'il est possible, & qu'elles doivent s'arranger selon une forme sphérique, puisque leurs attractions sont égales par supposition : les autres parties les plus proches, s'arrangeront autour des premières, & formeront une couche sphérique autour des premières, & ainsi de suite jusqu'aux dernières, & par conséquent cet amas de matiere formera un solide dont la figure est sphérique, & ne sauroit être d'aucune autre forme.

COROLLAIRE.

37. Delà il suit qu'il est manifeste, que si la force attractive cessoit d'agir à une certaine distance C du point fixe, ou que si quelqu'autre force répulsive venoit à détruire cette attraction à une certaine distance du centre C, les parties de matiere s'arrêteront en cette distance sans s'approcher davantage, & en ce cas il y auroit un vuide Lmn en dedans de la sphere, qui auroit la même figure que la premiere, puisque la cessation de la force attractive, à une certaine distance, n'empêcheroit pas que la partie solide ne fût une orbe sphérique.

On a fait voir que les forces centripetes sont dans la raison directe des quantités de matiere & des quarrés des distances inverses, l'attraction sur la surface des spheres, sera donc dans la raison directe des cubes de leurs rayons & de leurs quarrés inverses, c'est-à-dire, dans la raison directe de leurs rayons.

THEOREME II.

38. Si à présent on suppose que cette sphere vienne à tourner autour de l'axe Aa, avec une certaine vitesse qui soit comparable avec celle produite par la force attractive ; je dis que cette sphere s'allongera vers l'équateur BC, & formera un sphéroïde. Fig. 10.

* Art. 34.

En tirant NP perpendiculaire à l'axe Aa , & en décomposant la force dans la direction CM , en la perpendiculaire MP , & en la parallèle CA à l'axe, la force en M dans la direction MP , sera à la force en D , comme PM est à CD ; & comme la force centrifuge en M est aussi à la force centrifuge en D dans la raison de $* PM$ à DC ; l'augmentation MN de PM , causée par la force centrifuge en M , sera à l'augmentation BD de CD , causée par la force centrifuge en D , comme PM est à CD , ce qui est la propriété de l'ellipse; par conséquent si la sphere tourne autour de son axe Aa , elle sera changée en un sphéroïde.

C O R O L L A I R E I.

39. Il est manifesté que ce sphéroïde s'allongera d'autant plus vers l'équateur, que la force centrifuge est plus grande: or cette force augmente dans des cercles égaux, autant que la révolution se fait en moins de tems; & cette force pourroit être telle que le sphéroïde deviendrait tout plat vers les pôles; & lorsqu'il seroit égal à la force qui attire les corps vers le centre, les parties ne pourroient plus s'approcher du centre, & le tiendroient aux mêmes distances.

C O R O L L A I R E II.

40. Il est aussi évident que, quoique les parties de la matiere qui forment les corps célestes soient de différentes densités ou non, cela n'empêche pas que les corps ne soient des sphéroïdes, puisque les parties les plus solides s'approcheront les premières, & s'arrangeront autour du centre, & les autres selon leurs densités; & en ce cas, il n'y auroit point d'autre changement, si ce n'est que le sphéroïde seroit plus dense vers le centre que proche de la surface, puisque la force centrifuge doit produire son effet; mais que le sphéroïde fût allongé vers les pôles, il n'y a aucune raison, & par conséquent cette forme est impossible.

T H E O R E M E III.

41. *L'attraction du corps vers le centre d'un Pendule, placé à la surface, est comme la distance du centre.*

Car on a prouvé, & les expériences l'ont confirmé, que les corps célestes s'attirent les uns les autres par des forces (1) qui

(1) Voyez la gravité des corps placés sur la surface des planetes.

font

sont comme la quantité de matiere directe, & les quarrés des distances inverses. Or la quantité de matiere peut être exprimée par le cube des demi-diametres dans les sphéroïdes semblables, & la distance étant aussi égale au demi-diametre, la force qui attire les corps placés sur la surface des planetes, est donc comme les cubes des demi-diametres directs, & comme les quarrés des mêmes demi-diametres inverses, ou comme les distances directes.

Les Auteurs qui ont traité cette matiere, ont prouvé la même chose, mais par un calcul très-embarrassant, & qui me paroît être fort inutile, puisque cela est évident de soi-même : car quand on suppose que les attractions éloignées à différentes distances, sont dans la raison de la quantité de matiere directe, & des quarrés des distances inverses, il faut de nécessité que les corps placés à la surface des planetes semblables, soient comme les distances du centre à ces points, puisqu'elles sont sensiblement semblables, & par conséquent comme les cubes des demi-diametres semblables, à moins qu'on ne veuille supposer que la densité de matiere d'un côté du centre soit différente de l'autre ; & en ce cas il n'est pas possible de trouver cette attraction par aucun moyen, de sorte que le grand calcul employé par les Auteurs dont je veux parler, deviendroit aussi inutile que ce que nous venons de prouver d'une maniere si aisée.

THEOREME IV.

42. *Dans les planetes la direction de la gravité est partout Fig. 11, perpendiculaire à la tangente en chaque point de la surface.*

L'expérience fait voir clairement que cela est ainsi à l'égard de notre terre, & il est manifeste par la Statique, que la direction de la gravité dans tous les fluides, est perpendiculaire à sa surface ; & la chose ne sçauroit être autrement, puisque les parties ne sçauroient être en repos sans cela : or il est très-probable que toutes les planetes sont en partie composées de fluides ; & en ce cas la direction de la gravité est perpendiculaire à la surface : je dis même que cela doit être ainsi dans tout corps qui tourne autour d'un axe, quoiqu'aucune de ses parties ne soit fluide ; car autrement les corps qui romberoient sur leurs surfaces, rouleroient vers la partie la plus basse, de la même maniere que si le corps tomboit sur un plan incliné. De plus, puisque la même cause, qui dirige la direction de la gravité sur la surface de la terre, se trouve dans toute autre planete, ou corps qui tourne

autour d'un axe, il faut de nécessité que les effets soient de même: par conséquent la direction de la gravité, sur la surface d'une planète quelconque, est perpendiculaire à la tangente en chaque point de la surface.

N. B. Messieurs Bouguer & Clairaut prétendent que la direction perpendiculaire dans les fluides ne suit pas nécessairement de leur équilibre dans de certaines hypothèses qu'on peut faire sur la pesanteur: mais pour détruire cette loi universelle, il faudroit que l'un ou l'autre prouvât auparavant que cette hypothèse peut avoir lieu dans la nature, ce qu'ils n'ont pas fait & ne sauroient faire: de plus, si on vouloit révoquer en doute tous les principes de Mécanique par des hypothèses imaginaires, nous ne serions certains d'aucune chose du monde; & si cela étoit légitime, on pourroit fort bien faire des hypothèses qui détruiroient tout ce que ces Messieurs ont avancé dans leurs écrits.

P R O B L E M E I.

Fig. 1.

43. *Le rapport entre les forces de gravité dans deux latitudes quelconques d'une planète étant donné, il s'agit de trouver le rapport entre le diamètre de l'équateur & l'axe qui passe par les poles.*

Soit ABa une section par les poles A, a , & soit MK perpendiculaire à la tangente M , rencontrant le rayon CB de l'équateur en K , & soit tiré le diamètre CM & MP perpendiculaire à CB ; cela posé.

Puisque la direction de la gravité en M est dans la perpendiculaire MK , celle de la force centrifuge dans CB , & celle de la force centrale dans CM ; & puisque trois puissances sont en équilibre lorsqu'elles sont dans la raison des côtés du triangle formé par leurs directions, selon les règles de Mécanique, si CM exprime la force centrale, MK exprimera la gravité au point M , & CK la force centrifuge en ce point: or nous avons prouvé que les forces centrales sont comme les distances; il est donc vrai que les forces de gravité sont aussi comme les perpendiculaires MK , & les forces centrifuges comme les parties CK du rayon de l'équateur terminées par les perpendiculaires.

Par conséquent le rapport entre deux de ces perpendiculaires étant donné, le rapport entre les axes de l'ellipse sera aussi donné.

COROLLAIRE I.

44. Delà il suit que si le point M tombe en B, la perpendiculaire MK deviendra égale au parametre du demi-axe CB, par la nature de l'ellipse, c'est-à-dire, qu'elle est troisieme proportionnelle à CB & CA; & lorsque le point M tombe en A, la perpendiculaire MK devient égale à CA. Donc puisque CB est à CA, comme CA est au parametre de BC, il suit que la gravité au pole A est à la gravité sous l'équateur B, comme le rayon CB est au demi-axe CA; ce qui est précisément la même chose que ce que tous les Auteurs ont trouvé par des voies différentes.

COROLLAIRE II.

45. Par la propriété de l'ellipse, CK est à cette partie de CB, lorsque le point M tombe en B, comme CP est à CB; & par conséquent la force centrifuge au point M est à la force centrifuge sous l'équateur B, comme le rayon CP du cercle décrit par le point M dans la révolution de la figure autour de l'axe Aa, est au rayon CB de l'équateur; ce qui s'accorde avec ce que les Auteurs dont il s'agit, ont trouvé, & avec ce que nous avons prouvé dans l'article 34.

COROLLAIRE III.

46. Si l'on tire le demi-diametre CN parallele à la tangente en M, & que la perpendiculaire MK soit prolongée jusqu'à la rencontre de CN, en L, la ligne ML exprimera la gravité primitive en M, ou la force totale avec laquelle un corps, placé en M, seroit attiré dans la direction MK, si elle n'étoit diminuée par la force centrifuge. Car en décomposant la force centrifuge CK en la perpendiculaire CL, & en la parallele LK, la partie LK exprimera son effet dans la direction MK, & par conséquent diminuera la force de gravité primitive de cette quantité.

COROLLAIRE IV.

47. Si le rayon CB de l'équateur est l'unité, $CA = a$, $CP = u$, $PM = y$, & la distance du centre au foyer d , c'est-à-dire, $1 - bb = dd$, on aura $yy = bb \times 1 - uu$, & $KP = bbu$, par la propriété de l'ellipse; & la somme des quarrés de PK & de Xx ij

PM est égale au carré de MK, c'est-à-dire, $\overline{MK}^2 = yy + uu b^4$; & en mettant la valeur de yy , il viendra $\overline{MK}^2 = bb \times \frac{1 - uu + bb uu}{1 - uu + bb uu}$, ou à cause que $c - bb = dd$, on aura enfin $MK = b \sqrt{1 - dd uu}$.

C O R O L L A I R E V.

48. Pour avoir l'expression de KM, qui puisse se rapporter aux observations, il faut chercher le rapport entre CP, & le sinus de l'angle MKB, qui est celui de la latitude du point M; ce qui se fait en nommant s le sinus de cet angle MKB, & son cosinus; & on aura KP (bbu):PM (y):: $s:t$, ou $sy = bb tu$; substituant la valeur de y dans l'équation de l'ellipse $yy = bb \times \frac{1 - uu}{1 - uu}$, on aura $bb tu uu = ss = uu ss$; & la valeur de uu prise dans cette équation, étant mise dans celle de MK, donne $\overline{MK}^2 = bb \times \frac{1 - \frac{ss dd}{ss + tbb}}{1 - \frac{ss dd}{ss + tbb}}$. Ce qui étant réduit sous la même dénomination, & bb étant mis au lieu de $1 - dd$, l'unité pour $ss + tt$, & en faisant $1 - n = bb$, il viendra enfin $bb = MK \sqrt{1 - nu}$, pour l'équation qui contient le rapport entre les axes, lequel sera entièrement connu lorsque le rapport de la gravité en deux latitudes différentes, est donné.

C O R O L L A I R E V I.

49. Delà il suit, que si p est à c , comme la gravité dans une latitude quelconque M donnée, est à la gravité sous l'équateur B, comme MK, devient égale à bb , sous l'équateur, on aura $pp : cc :: 1 : 1 - ntt$, ou $ee = pp \times \frac{1 - ntt}{1 - ntt}$, ou en faisant $1 - \frac{c^2}{p^2} = r$, on aura $r = ntt$, pour l'équation qui exprime le rapport entre les axes de l'ellipse; lorsque celui de la gravité sous l'équateur & dans une latitude quelconque est donné.

Tous les Auteurs, depuis le Chevalier Newton, ont cherché ce rapport, par la méthode des fluxions; ce qui les a obligé d'avoir recours à la quadrature des sections coniques, lesquelles ne se peuvent exprimer que par des suites infinies; de sorte que leur calcul est fort long & embarrassant, & quelques-uns fort obscurs, ce qui est ordinairement le fruit des recherches trop

raffinées, & qui au bout du compte, rend ce qu'on veut trouver fort douteux, en ce qu'il n'est pas fort aisé de sçavoir si l'on n'a pas commis quelques erreurs, ou dans le calcul, ou dans quelques-uns des principes : du moins cela est arrivé dans le cas présent, puisque tous ceux qui ont écrit sur ce sujet n'ont pas trouvé le véritable rapport qu'il y a entre l'équateur & l'axe de la terre.

E X E M P L E.

50. Soit la latitude de 48 degrés & 50 minutes, qui est celle de Paris, on aura $t = .752798$ & $tt = .5667$; en prenant le rapport de M. Clairaut, entre la gravité à Paris & sous l'équateur, on aura $p = 43482$ & $e = 43375$, après avoir divisé les nombres qu'il donne par 5, pour rendre l'opération plus simple; ainsi $pp = 1890684324$, & $ee = 1881390615$, ce qui donne $r = \frac{9191699}{1890184324}$, & $n = \frac{9191699}{1071460160}$; par conséquent $1 - n = bb = \frac{3061166161}{1071460160}$, dont la racine carrée est $b = \frac{119089}{1173117}$.

En supposant le numérateur de cette fraction 229, selon le Chevalier de Newton, on trouvera le dénominateur de 229.99773, ou 230 à trois 10000^{me} partie près: mais en supposant le numérateur de 230, selon quelques Auteurs, on trouvera 231.004 pour le dénominateur. D'où l'on voit que le premier rapport est vingt fois plus proche que le second. Par conséquent le Chevalier Newton a mieux réussi par une méthode fort simple, que tous les Auteurs qui ont traité ce sujet depuis, par des calculs très-ennuyans & embarrassés.

Comme ce rapport ne s'accorde pas avec les mesures actuelles qu'on a prises depuis quelques années des différens degrés de méridiens, il s'agit d'en trouver un autre qui réponde le plus près aux dernières expériences qu'il soit possible: mais en faisant usage du degré de méridien mesuré sous le cercle polaire, & celui corrigé en France par M. de Maupertuis, on trouve un rapport entre les axes, qui ne s'accorde pas avec la mesure qu'on a prise sous l'équateur, ni avec la longueur du Pendule à secondes; & si l'on se sert des mesures prises sous l'équateur & le cercle polaire, on ne réussit pas mieux: de plus, en comparant les longueurs des Pendules à secondes, déterminées par M. Bouguer sous l'équateur, & par M. de Mairan à Paris, on trouvera encore un rapport bien éloigné du véritable.

Je suppose donc la longueur du Pendule à secondes de 440.

567 lignes mesures de France, à Paris, & celle sous l'équateur, de 439.41 lignes, laquelle est d'un cinquième de ligne plus longue que celle que M. Bouguer dit avoir mesuré, & un peu moindre que la longueur donnée par M. Newton, ce qui donne $p = 440567$, $e = 439410$, & $pp = 1940992815$, & $ee = 1930811481$, puisque $tt = .5667$, on trouvera $r = \frac{10151114}{1940992815}$, & $n = \frac{11966003}{1940992815}$. Par conséquent $1 - n = bb = \frac{1014016812}{1940992815}$, dont la racine quarrée est $b = \frac{31843}{440167}$.

En cherchant le rapport le plus proche exprimé par trois figures, on trouvera $b = \frac{311}{116}$; ce qui est bien différent de tous les rapports trouvés par les autres Auteurs; & pour prouver que c'est en effet le plus proche, il s'agit de faire voir qu'il s'accorde aussi bien avec les mesures actuelles qu'on puisse le désirer.

* Art. 100.
Ses. Cén.

* Art. 47.

Pour le prouver, il faut se souvenir que les petits arcs sont entr'eux comme les rayons de courbures; & ces rayons sont entr'eux comme * les cubes des perpendiculaires divisées par b^4 , lorsque $A C$ est l'unité, comme nous l'avons supposé; & comme les perpendiculaires MK , sont réciproquement proportionnelles à * $\sqrt{1 - ntt}$: les arcs sont réciproquement proportionnels aux cubes des $\sqrt{1 - ntt}$.

Si à présent l'on suppose $q = \sqrt{1 - ntt}$, dans la latitude de 66 degrés 20 minutes, on aura $t = .915896$, & $tt = .83886$; en mettant cette valeur aussi-bien que celle de n ; dans $q = \sqrt{1 - ntt}$, & en extrayant la racine quarrée on aura $q = .99610$, & $q^3 = .98833$.

En faisant $p = \sqrt{1 - ntt}$ dans la latitude de Paris, on aura $tt = .5667$, $p = .99727$, & $p^3 = .99213$. Or, selon M. de Maupertuis, le degré de méridien sous le cercle polaire est de 57437.9 toises; par conséquent $99213 : 98833 :: 57437.9 : 57218$ toises pour le degré de méridien à Paris; ce qui est moindre de 74 toises, que 57292 celui mesuré par M. Picard, selon ce qu'on a publié en 1701.

Comme le rayon de courbure sous le cercle polaire est à celui sous l'équateur, comme l'unité est à .98833; en multipliant 57437.9 toises par .98833, on trouvera 56767.6 toises pour le degré de méridien sous l'équateur; ce qui surpasse 56758 toises, celui mesuré sous l'équateur que de 14.6 toises seulement.

Si nous cherchons le degré de méridien de Londres, qui est

dans la latitude de 51 degrés & 52 minutes, on aura $t = .61304$,

& $\sqrt{1 - nt} = .99714$, dont le cube est .99145, ainsi 99145 : 98833 :: 57438 toises est à 57258 toises pour le degré de méridien à Londres, ce qui ne diffère de 57300 celui mesuré par M. Norwood que de 42 toises.

D'où il est manifeste que notre théorie s'accorde aussi-bien qu'on puisse souhaiter avec les quatre mesures qu'on a prises des degrés de méridiens dans différentes latitudes; car ceux qui les ont prises ne pourront se promettre d'avoir réussi si bien dans leurs opérations, qu'ils ne puissent manquer de 40 ou 50 toises: il leur doit suffire, & le public doit leur sçavoir gré du soin & des fatigues qu'ils ont pris, & de ce qu'ils ont approché si près de la mesure véritable. Il est vrai que l'on prétend que le degré de méridien mesuré par M. Picard, doit être moindre que celui qu'il a donné; mais comme il s'accorde parfaitement bien avec les autres mesures qu'on a prises depuis dans différentes latitudes, sa mesure doit être aussi exacte que celles prises par les autres Sçavans: autrement ils se sont tous trompés du même côté; ce qui n'est pas croyable.

Voyons à présent si notre théorie s'accorde aussi avec les expériences qu'on a faites sur le Pendule à secondes; en nommant

$m = \sqrt{1 - nt}$, dans la latitude de Pello, qui est de 66 degrés & 48 minutes, on aura $t = .919315$, & $nt = .8448$, d'où l'on trouvera $= .99608$; & comme la gravité sous l'équateur est à celle à Pello, comme m (.99608) est à l'unité. Ainsi divisant la longueur 439.41 lignes du Pendule sous l'équateur, par 99608, on trouvera 441.14 lignes pour la longueur du Pendule à Pello, ce qui ne diffère de 441.17 lignes, qui est celle trouvée par M. de Maupertuis, que de $\frac{1}{100}$ de lignes.

En cherchant la longueur du Pendule à secondes à Londres, on la trouvera de 440.67 lignes mesure de France; ce qui s'accorde parfaitement bien avec les expériences citées dans l'article 26. Car en réduisant cette longueur en mesure d'Angleterre, on trouvera 469.498 lignes, ou 39.125 pouces, ce qui est exactement la longueur trouvée par le Docteur Halley.

D'où l'on voit que le rapport trouvé entre les axes de l'ellipse s'accorde aussi avec les expériences faites sur la longueur des Pendules, excepté la mesure de M. Bouguer: mais quand on considère que la sienne ne s'accorde pas avec la mesure des degrés de

méridiens, & que l'instrument dont il étoit obligé de se servir, qui n'étoit pas une Horloge à Pendule, mais seulement un poids attaché à un mur par le moyen d'une verge de pith, qui, comme l'on sçait, ne fait point les oscillations dans des tems égaux, il étoit moralement impossible qu'il pût mesurer cette longueur d'un cinquième de ligne près: d'ailleurs il s'est servi d'un poids dont la figure étoit très-incommode pour trouver son centre d'oscillation, qu'il faut cependant avoir lorsque l'on veut être aussi exact qu'on doit l'être dans une telle expérience.

Pour avoir la longueur du rayon de l'équateur, il faut chercher le rayon de courbure de l'arc mesuré sous le cercle polaire, & on trouvera 3290948. 9 toises pour ce rayon; & comme l'unité est à g^1 (98833) comme le rayon 3290948. 9 est au rayon de courbure sous l'équateur, que l'on trouvera de 3252543. 5 roises; pour avoir la partie qu'il faut ajouter à ce rayon, on dira comme le numérateur 1923026812 de la valeur de bb est au numérateur 17966003, de la valeur de n , ou en rejetant les trois dernières figures, 1923027 est à 17966, comme le rayon de courbure 3252543. 5, pour avoir le rayon de l'équateur, qui sera de 3281930. 5 toises, ou de 19697583 pieds.

Nous avons fait voir que n exprime la force centrifuge sous l'équateur, lorsque la force de la gravité primitive est représentée par le rayon BC de l'équateur ou l'unité: mais comme cette gravité primitive est constante ou uniforme, & que la force centrifuge est comme le sinus versé d'un petit arc, qui ne diffère pas essentiellement de sa corde, cette force doit être considérée comme accélérée, eu égard à la première: la force de gravité parcourra donc un espace double du rayon BC , pendant que la force centrifuge parcourra l'espace CK ; par conséquent l'effet de la gravité primitive est à l'effet de la force centrifuge, comme l'unité est à $\frac{1}{2}n$.

Ce que l'on prouvera encore de la manière suivante: puisque

* Art. 47.

* $bb = MK \sqrt{1 + \frac{1}{2}n11}$, on aura $MK = bb \times 1 + \frac{1}{2}n11$ à peu près, & que la force de gravité primitive est l'unité sous l'équateur, les accroissemens de gravité de l'équateur vers les poles, seront comme $\frac{1}{2}n11$, à peu près; mais les accroissemens sont comme les décroissemens de la force centrifuge, & aux poles cet accroissement devient $\frac{1}{2}n$, laquelle est par conséquent égale à la force centrifuge sous l'équateur,

Ceci

Ceci se prouve encore mieux par des exemples; car on a trouvé $n = \frac{9191499}{1071460186}$, lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe, est comme 230 à 229: l'effort de la gravité primitive sous l'équateur sera à l'effort de la force centrifuge dans le même endroit, comme le double du dénominateur 107146062 au numérateur 9293699, ou comme 230 est à l'unité à peu près; ce qui est évident, puisque l'effort de la force centrifuge doit ôter une 230^{me} partie de l'effort de la gravité primitive sous l'équateur, pour que les parties fluides soient en équilibre avec celles des deux poles.

Et comme $n = \frac{17966003}{1940992815}$, lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe est comme 216 à 215, l'effort de la gravité primitive sous l'équateur est à l'effort de la force centrifuge au même endroit, comme le double du dénominateur 1940992815, est au numérateur 17966003, ou comme 216 est l'unité à peu près. Ce qui fait voir évidemment que l'effort de la force centrifuge doit être exprimé par $\frac{1}{2} n$, lorsque la gravité primitive sous l'équateur est exprimée par le rayon de l'équateur ou de l'unité.

N. B. Après avoir réfléchi sur ce que nous trouvons l'effort de la force centrifuge différent des autres qui ont traité cette matière; j'ai vu qu'ils ont trouvé une valeur pour CK, par rapport à un sphéroïde qui ne fait point de révolution autour de son axe, & que cette valeur est d'un cinquième moindre que la nôtre à peu près, comme M. Simpson l'a fait voir dans son Traité des Fluxions, page 465. Ainsi en diminuant la nôtre d'un cinquième, ou, ce qui est la même chose, en prenant les quatre cinquièmes de $\frac{1}{2} n$, on aura $\frac{3}{5} n$, pour la même valeur que les autres ont trouvé.

Car lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe est comme 230 à 229, on a $n = \frac{919}{1071460186}$, dont les deux cinquièmes donneront $\frac{918}{264100}$, ou la gravité primitive est à la force centrifuge, comme 288 à l'unité à peu près. Mais si l'on cherche cette valeur de la force centrifuge en supposant le rapport entre l'équateur & l'axe, comme 216 à 215, on trouvera que la gravité primitive sous l'équateur est à la force centrifuge, comme 317 est à l'unité. Ce qui fait voir que la force centrifuge dépend du rapport entre l'équateur & l'axe, & que ceux qui ont supposé le rapport de 288 à l'unité, entre la gravité primitive à la force centrifuge, ont tacitement supposé le rapport de 230 à 229, de l'équateur à l'axe.

Yy

M. Simpson trouve le rapport entre l'équateur & l'axe, comme

$\sqrt{1 + \frac{1}{4}n}$ à l'unité ; & il suppose $n = \frac{1}{11}$, & delà il trouve ce rapport de 231 à 230. Mais si au lieu de prendre $1 + \frac{1}{4}n$, pour la racine quarrée de $\sqrt{1 + \frac{1}{4}n}$, comme il a fait, qu'on extraie la racine quarrée de cette quantité, on trouvera ce rapport entre 232 à 231, & 233 à 232. Ce qui montre qu'en négligeant la moindre chose, on trouve ce rapport différent de celui qu'on cherche.

M. Clairaut, dans son Traité sur la figure de la Terre, page 192, trouve $\frac{100}{1104}$ pour la différence entre le rayon de l'équateur au demi-axe ; ce qui donne pour leur rapport 2314 à 2304, ou si l'on veut exprimer ce rapport en trois figures, comme 463 à 461 ; ce qui est bien différent de celui de 231 à 230 qu'il donne. Il est vrai qu'il tâche de corriger le rapport de $\frac{100}{1104}$, pour avoir celui de 231 à 230 ; & pour le faire il suppose ce dernier rapport comme vrai ; & par ce moyen il cherche la force centrifuge qu'il avoit d'abord supposée être de $\frac{1}{11}$, & delà il le trouve de $\frac{100}{1111}$; mais cela s'appelle un cercle vicieux en Logique : or quand ce dernier rapport seroit vrai, il ne s'ensuit nullement que le premier le soit ; car il a trouvé par la supposition, que le degré du méridien sous l'équateur est de 57309 toises ; ce qui surpasse celui mesuré par Messieurs Bouguer & de la Condamine, seulement de 56 toises ; ce qui est peu de chose quand on veut avoir un rapport qui étoit déjà donné par des Auteurs Anglois, & qu'il semble vouloir imiter.

Il paroît que cet Auteur a une très-mauvaise opinion des mesures que ses Confreres ont prises sous l'équateur, puisqu'il en diffère tant dans ses calculs, & en même tems de celles prises sous le cercle polaire, auxquelles il a eu part : de plus le rapport entre l'équateur & l'axe qu'il donne, ne s'accorde nullement avec sa propre mesure, ni avec celles qui ont été prises sous l'équateur, comme il est aisé de s'en convaincre par ce que nous avons fait voir ci-devant.

M. Bouguer, dans son Traité de la figure de la terre, page 291, donne le rapport entre l'équateur & l'axe, comme 179 à 178, & il prétend que c'est le plus proche qu'on puisse trouver : mais sur quelle théorie a-t'il fondé son calcul ? sur une hypothèse la plus étrange qu'il soit possible d'imaginer : car une courbe qui rentre en elle-même, comme la figure de la terre le demande,

à cette propriété que les accroissemens des degrés du méridien sont comme les quatrièmes puissances des sinus de latitude. S'il avoit pris la peine de chercher cette courbe, il n'auroit sans doute pas avancé une chose si extraordinaire : il est vrai qu'il dit que la développée de la courbe, qu'il appelle gravicentrique, est un quart de cercle, mais il seroit très-difficile de tirer la figure de la terre de cette supposition : comme il suppose plusieurs courbes, les unes des développées des autres, dont la première est un quart de cercle, dont la développée est une spirale, la développée d'une spirale est encore une spirale, & ainsi de suite ; de sorte que, selon cette supposition, la figure de la terre doit être une partie de spirale, ce qui est absurde.

Il semble que cet Auteur rejette absolument la figure elliptique, quoique ce soit la seule qui soit possible : car qu'il cherche tant qu'il voudra, il n'en trouvera jamais d'autre qui rentre en elle-même, & qui puisse satisfaire à la question : la cycloïde ordinaire est la seule qui rentre en elle-même, outre l'ellipse ; mais comme sa base & son axe sont dans un rapport déterminé de la circonférence au diamètre, elle ne peut pas être celle que la section de la terre par les poles doit avoir.

Si l'on cherche le rapport entre l'équateur & l'axe, par le moyen du problème de M. de Maupertuis, dans son Traité de la figure de la terre, où il suppose le rayon de l'équateur limité, D la différence entre les axes, F un degré de méridien sous l'équateur, & E un autre degré dont le sinus des latitudes est s, on trouvera $D = \frac{E-F}{3E \sin s}$. D'où en faisant $F = 56753$, & $E =$

57438, selon les mesures faites sous l'équateur & au cercle polaire, on aura $\sin s = .838587$, pour le carré du sinus de 66 degrés & 19 minutes, & en mettant ces nombres, on trouvera $D = \frac{143921}{111111}$, d'où l'on tire le rapport demandé, comme 143921 est à 143236, ou comme 210 est à 209. Comme la solution de ce problème est juste, il faut que la différence entre celui-ci & celui que nous avons donné, vienne des quantités que M. de Maupertuis a négligées comme peu de chose, & cependant assez considérables pour changer le rapport demandé.

Nous avons fait voir que les accroissemens de gravité, depuis l'équateur jusqu'aux poles, sont à peu près comme $\frac{1}{2} n \sin s$, ou à cause que $\frac{1}{2} n$, est constante comme 22 les carrés des sinus de latitude, & c'est par cette règle que les Auteurs construisent

Y y ij

communément des Tables sur les longueurs des Pendules pour les différens endroits de la terre ; mais comme cette approximation ne va guere plus loin qu'à quatre figures, elle n'est pas suffisamment exacte : c'est pourquoi, il vaut mieux faire ces longueurs réciproquement proportionnelles à $\sqrt{1 - n t t}$, comme nous avons fait voir dans l'article 47 ; & alors on est certain que les valeurs qu'on trouve, seront d'autant plus exactes, que l'on poussera l'extraction de la racine quarrée de cette quantité plus loin.

P R O B L E M E.

51. *Le rapport entre les diametres de l'équateur de la terre, & celui d'une planete quelconque, étant donné aussi-bien que celui de leurs tems de révolution, il s'agit de trouver le rapport entre les axes de cette planete.*

Soit r le tems de révolution de la terre, & celui de la planete, & soit le rapport entre les diametres des équateurs, comme l'unité à a , cela posé, puisque les forces centrifuges sont dans la raison des rayons directs, * & des quarrés des tems de révolution inverse ; en nommant n la force centrifuge de la terre, on aura $\frac{1}{r r} : \frac{a}{t t} :: n : \frac{a n r r}{t t}$ = à la force centrifuge de cette planete : c'est pourquoi, si le rayon de l'équateur est l'unité, & le demi-axe b , on aura * $1 - b b = \frac{a n r r}{t t}$, ou $b b = 1 - \frac{a n r r}{t t}$, dont la racine quarrée donnera le rapport demandé.

E X E M P L E.

52. Soit Jupiter la planete : comme la terre tourne autour de son axe en 23 heures 56 minutes, & Jupiter en 9 heures & 56 minutes, & que les quarrés de ces tems sont comme 29 à 5, à peu près, ainsi $r r = 29$, $t = 5$: & comme nous avons trouvé, en comparant les diametres des planetes, que le diametre de Jupiter étoit 9. 1638 diametres de la terre, on aura $a = 9. 16$, à peu près : nous avons aussi trouvé $n = \frac{431}{46616}$; d'où en mettant ces valeurs, on aura $b b = \frac{11449}{17138}$, dont la racine quarrée donne $b = \frac{107}{131}$, pour le rapport demandé ; ce qui est comme 5 à 7, à peu près.

Il faut remarquer que le rapport entre les diametres des équateurs que nous venons de supposer, ne pourroit pas être le

véritable ; & dans ce cas , il peut arriver que le rapport que nous venons de trouver ne soit point exact ; car vu la grande difficulté que les Astronomes trouvent en observant des objets qui paroissent si petits par rapport à leurs éloignemens , il n'est presque pas possible qu'ils puissent distinguer la différence qui se trouve entre leurs axes : cependant il est vraisemblable qu'ils cherchent toujours à mesurer les plus grands , parce qu'il est plus visible , ou qu'il donne un angle plus mesurable.

Des noyaux ou vuides dans les Planetes.

Plusieurs Philosophes croient qu'il peut y avoir des vuides dans le centre des planetes. Quoique cela ne soit qu'une conjecture , elle est néanmoins fondée sur de très-bonnes raisons ; en effet quand on considère le grand amas de matiere dans les planetes qui ne semble pas avoir aucun usage après une certaine profondeur , on est tenté de croire que ce que nous voyons n'est autre chose qu'une croûte d'une certaine épaisseur. Car selon la bonne philosophie, Dieu ne créa rien en vain , & ce qui n'est d'aucun usage est superflu ; par conséquent , si les planetes sont solides , la matiere que nous croyons inutile doit être de quelque usage inconnu aux hommes. Cependant comme les hommes ne peuvent juger des choses que selon la raison , & que cette raison nous persuade que les planetes doivent avoir des noyaux vuides , il n'y a point d'absurdité de supposer qu'il y en a un en effet.

S'il y a un vuide dans les planetes , il faut que la matiere ait quelque autre propriété aussi universelle que celle que nous appelons la gravité ; autrement elle ne s'arrêtera pas à une certaine distance du centre , comme cela doit être , selon la supposition d'un vuide. Il semble en effet qu'il y a une propriété répulsive dans la nature , comme il y en a une qui attire les corps vers un certain point : car nous voyons dans les expériences faites sur l'Electricité , que certains corps fort légers ne s'approchent du verre frotté que jusqu'à une certaine distance , & après cela , ils s'éloignent avec beaucoup de vivacité ; & que quelques autres corps un peu plus pesans , sont comme suspendus en l'air , sans s'approcher ni d'un côté ni de l'autre , de sorte que la valeur attractive paroît être en équilibre avec la vertu répulsive.

Le Chevalier Newton croyoit qu'il y avoit une telle vertu

dans chaque particule de la matiere, qui les empêchoient de se toucher tout-à-fait les unes & les autres : en effet, on sçait que les corps les plus solides ont des pores, ce qui seroit assez difficile d'expliquer, sans cette vertu, puisqu'il n'y auroit point de raison qui les empêchât de se toucher. Car quand on diroit que ce sont les figures des parties primitives de la matiere qui les empêchent de se joindre, cela ne peut pas être la cause que les parties de l'air & des autres substances fort déliées, se tiennent en une distance considérable, eu égard à leur grosseur, & ne s'approchent davantage. Quoique nous ignorions encore la loi selon laquelle cette force expansive agit, il est néanmoins certain qu'elle en suit toujours une qui est constante : je veux dire que si la force augmente ou diminue, selon les quarrés ou cubes des distances dans certains cas, elle augmentera ou diminuera aussi dans tous les autres.

P R O B L E M E.

Fig. 12. 53. Trouver la figure du noyau vuide dans une sphere qui ne tourne pas autour de son axe.

Supposez que la sphere soit décrite par la révolution du demi-cercle ABD , autour du diametre AD , comme axe, il est clair que si la matiere s'arrête dans un point quelconque a du rayon CA , elle s'arrêtera aussi dans les points b, d , également distans du centre C , dans le rayon CB & CD : puisque la gravité est égale à des distances égales du centre, par ce que nous avons prouvé ci-devant, aussi-bien que la force répulsive par supposition ; par conséquent ces deux forces doivent être en équilibre entr'elles à des distances égales du centre,

C O R O L L A I R E.

Fig. 13. 54. Desà il suit que si cette sphere venoit à tourner autour de l'axe AD , de maniere qu'elle s'alongeât en un sphéroïde, il est clair que le noyau vuide s'alongeroit aussi en même proportion, & deviendrait un sphéroïde semblable au premier : puisque la même force centrifuge qui alongeroit le cercle du rayon BC , alongeroit aussi le cercle du rayon Cb en proportion, parce que la force centrifuge en B est à la force centrifuge en b , comme CB est à Cb .

N. B. Quelques Auteurs qui ont parlé du noyau vuide, pré-

tendent que la figure n'est pas semblable au sphéroïde en dehors ; mais comme ils n'ont point démontré que cela doit être ainsi , & que c'est le contraire , comme il paroît dans le corollaire précédent , on ne s'arrêtera pas à ce que ces Auteurs ont dit sur ce sujet.

PROBLEME.

55. *Trouver le rapport entre le rayon Cb du noyau vuide dans une sphere au rayon de la sphere.*

Quoique nous ne sçachions pas précisément par quelle loi cette force expulsive agit , elle doit néanmoins être telle , que la force soit plus grande au centre qu'ailleurs , & elle doit diminuer en s'éloignant du centre , & par conséquent cette loi ne peut être dans la raison directe des rayons Cb , & encore moins dans la raison directe d'aucune des puissances de ses rayons ; car comme la gravité diminue dans la raison inverse des quarrés des distances , il faut que cette force diminue dans une raison inverse plus grande que la premiere.

Or si l'on suppose que la gravité soit comme les distances , comme cela arrive sur la surface des planetes , & que la force expulsive soit comme les quarrés des distances inverses , l'équation qui en résulte , contient des absurdités ; & ainsi ces forces ne peuvent être dans cette raison ; mais si l'on suppose que la gravité soit dans la raison inverse des quarrés des distances , & la force expulsive dans la raison inverse des cubes des distances , l'équation qui résulte de cette supposition , contiendra le rapport demandé.

Car si $CB = x$, $bB = y$, on aura $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, ou $xy = x^3$, dans le cas de l'équilibre ; & si le rayon CB est l'unité , on aura $1 - x = y$, & $1 - 2x + xx = yy$; donc $1 - 2x + xx = x^3$, ou $1 = 2x - xx + x^3$: or si l'on fait usage de la regle de Daniel Bernoulli , en supposant trois unités pour les trois premiers termes de la suite , on aura 1. 1. 1. 2. 4. 7. 12. 21. 37. 65. 114. 200. 351. 616. 1081 ; & en divisant le pénultieme terme 616 par le dernier 1081 , on aura $x = .56984$, & par conséquent $y = .43016$; ainsi le rayon Cb est à bB , comme 7123 est à 5377.

Nous imaginons que la raison entre les rayons que nous venons de donner est la plus probable , en ce que la force expulsive ne peut guere être plus grande : car quand on suppose que cette

force est comme la quatrième puissance des distances, on trouve le rapport de Cb à bB , comme 2236 à 1000; mais après cela le rapport augmente beaucoup plus.

C O R O L L A I R E.

Fig. 13.

56. Puisque le noyau dans un sphéroïde qui tourne autour de son axe, est semblable au sphéroïde, il s'ensuit, que si le sphéroïde est formé par la révolution de l'ellipse ABD autour de son axe AD , & le noyau vuide par l'ellipse abd , semblable à la première, on aura Cb est à CB , comme 56984 est à 100000. Or comme le rayon de l'équateur de la terre est de 3282930. 5 toises, le rayon Cb de l'équateur du noyau sera de 1870745 toises, & $bB = 1412185$.

Voilà à peu près ce que nous avons jugé à propos de dire touchant les figures des planetes : nous sommes persuadés de l'avoir tiré des principes les plus simples qu'il peut y avoir, sur un sujet qui a fait tant de bruit, & que la plupart des Mathématiciens les plus célèbres de notre tems ont jugé digne de leur attention; & s'ils n'ont point réussi selon que l'on devoit l'attendre de leurs génies, c'est qu'ils ont tous embrassé des principes très-composés, au moyen desquels il est très-difficile de sçavoir si l'on ne s'est point écarté de la vérité; & la plupart ont trop négligé leurs calculs numériques pour trouver le véritable rapport entre l'équateur & l'axe, quand même ils auroient été d'ailleurs bien fondé, & que leurs principes seroient bons. Il est vrai que l'on ne tombe pas d'abord sur la voie la plus courte dans un sujet nouveau, parce que l'on croit que cela dépend de principes peu communs; mais ce qui surprend, c'est que quelques-uns aient abandonné les mêmes principes dont nous nous sommes servis, après les avoir donné, pour en adopter d'autres moins clairs & moins aisés, comme si les choses simples n'étoient pas dignes de leurs plumes. Un autre défaut que je trouve, est que les uns ont trop suivi les autres, comme s'il étoit suffisant que leurs théories s'accordassent avec celles de ceux qui ont écrit avant eux, ce qui est une conduite pernicieuse pour l'avancement des Sciences & des Arts.

N. B. Le Chevalier Newton dit, dans la dix-neuvième proposition du troisième Livre, que la différence entre l'équateur & l'axe de la terre, est de $17\frac{1}{2}$ milles d'Angleterre; & dans la proposition suivante, que cette différence doit être un peu plus grande,

grande, pour s'accorder avec les expériences faites sur la longueur des Pendules : or, selon notre rhéorie, cette différence est de $19\frac{1}{2}$ de milles ; ce qui s'accorde assez bien avec ce que ce grand homme a dit ; & par conséquent il a mieux réussi dans la théorie qu'aucun des Auteurs qui ont traité ce sujet.

SECONDE PARTIE.

Du Mouvement dans un milieu résistant.

Nous avons supposé dans la première partie que les corps en mouvement, ne rencontroient d'autre résistance que la gravité qui les détournait de leurs directions en lignes droites, & les faisoit décrire des lignes courbes ; ce qui rend les loix du mouvement fort simples & fort aisées : mais comme les corps ne peuvent se mouvoir dans un milieu, sans rencontrer plus ou moins de résistance, selon que ce milieu est plus ou moins dense, il est nécessaire de faire voir dans cette seconde partie qu'elles doivent être les loix lorsque la résistance est à la gravité dans un rapport constant ou variable donné ; ou, si la courbe décrite par le corps est donnée, de trouver quel rapport la résistance suit ; & en général en quoi consiste la différence entre le mouvement dans un milieu sans résistance & dans un qui résiste : par ce moyen on pourra déduire ce qu'il y a de plus difficile dans le mouvement dans un milieu quelconque, comme on va voir.

THEOREME I.

36. La fluxion de la vitesse v , acquise par une force quelconque Fig. 14. P , dans le tems t , dans un milieu dont la résistance est exprimée par R , est comme le rectangle $P \times t$.

Si l'abscisse AP exprime le tems, l'ordonnée PN de la courbe aN , la force P , & l'ordonnée PM de la courbe AM , la résistance, il est évident que l'espace aNP exprimera l'effet de la force P pendant le tems AP , & l'espace AMP , l'effet de la résistance pendant ce tems ; & par conséquent la différence aNM de ces espaces exprimera la vitesse effective acquise

Zz

pendant le tems AP: or $P \times t$, exprime la fluxion de l'espace $A a N P$, & $R \times t$ celle de l'espace $A M P$; par conséquent la fluxion de la vitesse v est comme $\overline{P - R} \times t$.

T H E O R E M E I I.

57. *La fluxion de l'espace s parcouru avec une vitesse v , acquise dans le tems t , sera comme $v t$, c'est-à-dire, de même que dans un milieu sans résistance.*

Car il est clair que les espaces parcourus dans le même tems, sont comme les vitesses, puisque si $P M$ exprime la vitesse acquise pendant le tems $A P$, l'espace $A M P$ sera comme l'espace parcouru, & la fluxion $v t$ comme la fluxion de l'espace parcouru, de même que dans un milieu sans résistance: donc la seule différence ne consiste qu'en ce que la vitesse est diminuée ici par la résistance, & ainsi l'espace parcouru est diminué en proportion.

T H E O R E M E I I I.

58. *La résistance du milieu se fait seulement dans la direction du corps, & en nulle autre part.*

Car la résistance ou pression est égale & opposée dans toute autre direction que celle du corps; & par conséquent ne peut retarder ni avancer le mouvement du corps; ainsi les équations que nous avons trouvées dans la première partie, seront ici de même, excepté celles qui regardent la direction du corps.

T H E O R E M E I V.

59. *La résistance d'un milieu est dans la raison composée du quarré de la vitesse, de la densité & de la tenacité.*

Car dans un milieu uniforme & sans tenacité, un corps frappe avec une vitesse $n v$, chaque particule n fois plus forte qu'avec la vitesse v , & rencontre aussi n fois plus de particules en même tems; ainsi la résistance seroit comme le quarré de la vitesse dans ce cas.

Dans un milieu n fois plus dense, le corps frappera n fois plus de particules dans le même tems & avec la même vitesse; & comme le corps trouve aussi plus ou moins de résistance, selon qu'il trouve plus ou moins de difficulté à séparer les parties les unes des autres, il est clair que la résistance d'un milieu est

dans la raison composée des quarrés des vitesses, de la densité & de la tenacité.

THEOREME V.

60. *Dans le même milieu la résistance, que les corps de différentes grosseurs souffrent, sont dans la raison directe de leur surface & de leur poids inverse.*

Il est clair que la résistance augmente selon la grosseur des corps, & diminue en proportion que leurs poids augmente; car c'est l'excès du poids du corps par dessus celui du milieu qui les pousse, & par conséquent les résistances que souffrent des corps inégaux en grosseur & en poids, sont dans la raison directe de leurs surfaces & de leurs poids inverse.

COROLLAIRE I.

61. De là il suit, puisque dans les corps semblables les surfaces sont comme le quarré de leurs axes ou diamètres, & leur solidité comme les cubes de leurs axes ou diamètres, il s'ensuit que les corps semblables rencontrent des résistances qui sont comme leurs diamètres inverses. Par conséquent la résistance des corps semblables diminue dans la même raison que leurs diamètres augmentent. Par exemple, la résistance d'un boulet de canon de trois pouces de diamètre sera double de celui d'un autre de six pouces; ce qui fait voir que les boulets des gros canons doivent aller plus loin que ceux des petits qui partiront avec la même vitesse.

COROLLAIRE II.

62. Il est aussi évident que les corps semblables, de différentes gravités spécifiques, sont dans la raison des quarrés de leurs diamètres directs & de leurs poids inverses. Puisque leurs surfaces sont comme les quarrés de leurs diamètres, & leurs gravités spécifiques comme leurs poids. Par exemple, une bombe de 12 pouces pèse environ 200 livres, quand elle est chargée, & le diamètre d'un boulet de 24 est de 5. 5 en Angleterre; ainsi la résistance du boulet est à la résistance de la bombe, comme $\frac{30.15}{24}$ est à $\frac{144}{300}$, ou comme 7 est à 4, à peu près.

T H E O R E M E V I.

63. Dans un milieu dont les parties sont placés à des distances égales, & qui n'ont point de ténacité, ni d'élasticité, une sphere avec une vitesse uniforme, perdra tout son mouvement en parcourant un espace qui est à quatre troisiemes de son diametre, comme la densité du corps est à la densité du milieu.

Car si le cylindre circonscrit se meut dans ce milieu avec la même vitesse uniforme, & dans la direction de son axe, en parcourant un espace égal à la longueur de son axe, il déplacera un volume du milieu égal au cylindre, & par conséquent déplacera une quantité de matiere qui est à la quantité contenue dans le cylindre, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre; & en parcourant un espace qui est à la longueur de son axe, comme la densité du cylindre est à la densité du milieu de ce cylindre, il déplacera une quantité de matiere du milieu égale à la quantité de matiere contenue dans le cylindre; & par conséquent le cylindre communiquera tout son mouvement à une quantité de matiere égale à celle qu'il contient, & ainsi perdra tout son mouvement.

Où comme la sphere ne rencontre que la moitié de la résistance du cylindre, cette sphere doit parcourir deux fois l'espace que le cylindre a parcouru avant de perdre tout son mouvement, s'il est de la même pesanteur: mais comme la sphere n'est que les deux tiers du cylindre, elle doit parcourir les deux tiers du double de l'espace parcouru par le cylindre avant de perdre toute sa vitesse: mais les deux tiers de 2 est $\frac{4}{3}$; & par conséquent, la sphere perdra tout son mouvement en parcourant un espace qui est à quatre troisiemes de la longueur de son diametre, comme la densité de la sphere est à la densité du milieu.

C O R O L L A I R E.

64. Delà il suit, que si d exprime le diametre de la sphere, m sa densité, n celle du milieu, & r l'espace que le globe doit parcourir avant de perdre toute sa vitesse, on aura $m : n :: r : \frac{4d}{3}$, ou

$$r = \frac{4md}{3n}.$$

Or comme un corps qui tombe librement pendant un certain

tems acquiert une vitesse, laquelle étant continuée uniformément, fera parcourir au corps un espace double dans le même tems, il s'ensuit qu'un corps qui tombera de la moitié de la hauteur r , dans un milieu sans résistance, acquerra la plus grande vitesse qu'il puisse avoir dans ce milieu, & il continuera après cela avec une vitesse uniforme, & la résistance deviendra égale à sa gravité : donc si l'on met $\frac{1}{2}r$, au lieu de r dans l'égalité ci-dessus, on aura $r = \frac{8m d}{3^n}$. Par conséquent r exprimera le double de la hauteur qu'un corps en tombant dans un milieu sans résistance, acquerra avec la plus grande vitesse qu'il puisse avoir dans un milieu dont la densité est à celle du corps, comme n est à m .

PROBLEME I.

65. Si un corps est jeté en haut dans une direction verticale ; avec une vitesse donnée dans un milieu dont la résistance est exprimée par R , l'on demande la hauteur à laquelle le corps peut monter, & le tems employé.

Si z exprime la hauteur indéterminée, v la vitesse, & t le tems, on aura $v \dot{v} = P - R \times t$, & $v t = z$; & en mettant la valeur de t dans la première équation, il viendra $v \dot{v} = P - R \times z$ en montant, & $v \dot{v} = P - R \times z$ dans la descente, selon la remarque après l'article dixième. Ainsi en connoissant le rapport entre la force P & la résistance R , on trouvera la vitesse & le tems écoulé.

EXEMPLE I.

66. Soit la force P constante & l'unité, comme la gravité proche de la surface de la terre, & la résistance comme le carré des vitesses, c'est-à-dire, $R = \frac{vv}{r}$, en mettant cette valeur de R & l'unité pour P dans l'équation ci-dessus, on aura $v \dot{v} = z - \frac{vv^2}{r}$ dans la descente : d'où l'on tire $z = \frac{r v^2}{r - v^2}$, dont la fluente est $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r - vv}{r}$, lorsque le corps commence son mouvement du point de repos. Ou si q exprime le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura $-\frac{1}{2} r \log. q =$

log. $\frac{r-vv}{r}$, ou bien $q^{-\frac{vz}{r}} = \frac{r-vv}{r}$, d'où l'on tire $vv = r - r q^{-\frac{vz}{r}}$. Ainsi on connoîtra la vitesse en connoissant l'espace z parcouru.

En mettant la valeur de z ci-dessus dans $v \dot{z} = \dot{z}$, on aura $\dot{z} = \frac{r \dot{z}}{r-vv}$, dont la fluente est $z = \frac{1}{2} r \frac{1}{2} \log. \frac{r^2 + v}{r^2 - v}$.

Mais dans la montée on a $\dot{z} = \frac{r-vv}{r+v}$, dont la fluente est $z = A - \frac{1}{2} r \log. \frac{r+v}{r-v}$, & si c exprime la vitesse projectile, lorsque $z = 0$, on aura $v = c$, & $A = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+c}{r-c}$, & par conséquent $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+v}{r-v}$. On a aussi $\dot{z} = \frac{r \dot{z}}{r+v}$ dans ce cas; & si a exprime un arc de cercle, dont le rayon est à la tangente comme r est à v , on aura $z = A - a$, lorsque A exprime aussi un arc de cercle, dont le rayon est à la tangente, comme la racine carrée de r est à c .

Dans un milieu sans résistance, la quantité r est infinie en comparaison de vv : ainsi $\dot{z} = \frac{r \dot{z}}{r-vv}$, deviendra $\dot{z} = v \dot{v}$, ou $z \dot{z} = vv$, & $\dot{z} = \frac{r \dot{z}}{r+v}$, devient $\dot{z} = \dot{v}$, ou $z = v$; ce qui est la même chose que nous avons trouvée dans la première partie.

Si h exprime le double de la hauteur d'où un corps doit tomber dans un milieu sans résistance, pour acquérir la vitesse v , on aura $h = vv$, & $R = \frac{vv}{r}$ deviendra $R = \frac{h}{r}$; & lorsque $h = r$, on aura $R = 1$, c'est-à-dire, égale à la gravité du corps, conformément à ce que nous avons dit dans l'article 64.

EXEMPLE II.

67. Supposant qu'un boulet de canon de quatre pouces de diamètre est jeté en haut, avec une vitesse acquise en tombant de la hauteur de 2968 pieds dans un milieu sans résistance; l'on demande la hauteur à laquelle le corps montera & le tems employé.

On aura $cc = 5936$, étant le double de la hauteur 2968; & comme la gravité spécifique du fer fondu est à celle de l'air, comme 5940, est à l'unité, selon notre table, on aura $n = 1$,

* Art. 64. $m = 5940$, $d = \frac{1}{2}$: ces valeurs étant mises dans $* r = \frac{8md}{3n}$, don-

neront $r = 5280$. Or si l'on fait $v = 0$, dans $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+c}{r-c}$, on trouvera $z = 1988.97$ pieds pour la plus grande hauteur à laquelle le corps puisse monter avec la vitesse c .

On trouvera l'arc A de 46 degrés & 40 minutes, ou de $46\frac{2}{3}$ degrés; ce qui donne $t = 59.1719$ pieds; & comme un corps tombe de la hauteur de 32.2 pieds dans une seconde de tems, dont la racine quarrée est 5.674; en divisant la valeur de t par 5.674, on aura $t = 10.43$ secondes pour le tems écoulé; ce qui est 68 secondes moindre que 11.11 secondes, le tems que le corps auroit employé dans la descente de la même hauteur, dans un milieu sans résistance. * Art. 132.

E X E M P L E I I I.

68. Supposant que l'espace parcouru en descendant soit égal à l'espace en montant, l'on demande la vitesse acquise & le tems écoulé.

Comme on a $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+c}{r-c}$ dans la montée, on aura $\frac{1}{2} r \log. \frac{r+c}{r-c} = \log. \frac{r+c}{r-c}$, ou $q \frac{1}{2} = \frac{r+c}{r-c}$: cette valeur étant mise dans $v v = r - r q^{-\frac{1}{2}}$, donne $v v = \frac{r+c}{r-c}$. Or comme $c = 5936$, & $r = 5280$, en mettant ces valeurs, on trouvera $v v = 2794$ pieds.

Puisque $t = \frac{1}{2} r t \log. \frac{r+v}{r-v}$; & que $v = 52.858$, $r = 72.663$, ces valeurs étant mises, on trouvera $t = 67.0861$ pieds, ce qui étant divisé par 5.674, la racine quarrée de 32.2, donne 11.82 secondes; ce qui excède le tems de la descente dans un milieu sans résistance de 71 secondes, & celui 10.43 de la montée de 1.39 secondes.

Il faut remarquer que les expressions logarithmiques, sont du genre hyberbolique, & ainsi quand on fait usage des tables ordinaires, il faut toujours multiplier le logarithme que l'on a trouvé, par le logarithme 2.302585, hyperbolique de 10, pour avoir les valeurs de ces expressions: ainsi on doit se souvenir de cela dans la suite, lorsque l'on se sert des expressions logarithmiques.

L'on peut aussi exprimer les valeurs des tems, vitesses & espaces parcourus, par des suites infinies, assez commodément,

sans faire usage des tables des sinus & logarithmes, comme on va voir.

* Art. 65.

L'équation $* \nu \psi = z - \frac{\nu \psi}{r}$, dans la descente, étant réduite en une suite infinie, en supposant $\nu \nu = a z + b z^2 + c z^3 + \&c.$ donnera $\nu \nu = z - \frac{4az}{3r} + \frac{8z^2}{6rr} - \frac{16z^3}{24r^2} + \frac{32z^4}{120r^3} - \&c.$ d'où en supposant $2h = \nu \nu$, & $z = rx$, ou, ce qui revient au même, en mettant rz pour z , on aura $h = rx$ par. $z - z z + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{15} z^4 - \&c.$ Mais il faut remarquer qu'on doit multiplier la valeur de h par 2, pour avoir celle de $\nu \nu$, puisque nous avons supposé $2h = \nu \nu$.

E X E M P L E I V.

69. Soit la hauteur z , comme ci-devant, c'est-à-dire, $z = 1988.97$, & comme nous avons mis rz au lieu de z , il faut diviser 1988.97 , par la valeur 5280 de r ; ce qui donne $z = .3767$, $z z = .1419$, $z^3 = .0534$, $z^4 = .0201$, $z^5 = .0076$; en mettant ces valeurs dans la suite ci-dessus, on aura $h = 1397.5$, & $\nu \nu = 2795$, comme ci-devant, qui ne diffèrent que d'une unité.

L'équation $t = \frac{r \psi}{r - \nu \psi}$ dans la descente, étant réduite en une suite infinie par une division continuelle, donne $t = \nu + \frac{\nu^2}{3r} + \frac{\nu^3}{5r^2} + \frac{\nu^4}{7r^3} + \&c.$ & en supposant $hr = \nu \nu$, deviendra $t = \nu \times$ par $1 + \frac{1}{3} h + \frac{1}{5} h h + \frac{1}{7} h^3 + \frac{1}{9} h^4 + \frac{1}{11} h^5 + \&c.$

E X E M P L E V.

70. Soit $\nu \nu = 2795$, comme ci-devant, & $r = 5280$, on aura $h = .5294$, & $\nu = 52.867$; & en prenant les 10 premiers termes de la suite, on aura $t = 1.2689$; ce qui étant multiplié par 52.867 , la valeur de ν , on aura $t = 67.086$, comme ci-devant.

Comme nous avons $z = \frac{r \psi}{r - \nu \psi}$, cette expression étant réduite en une suite infinie, par une division continuelle, & la fluente étant prise, donne $A - z = \frac{1}{2} \nu \nu - \frac{\nu^4}{4r} + \frac{\nu^6}{6rr} - \frac{\nu^8}{8r^2} + \&c$; mais lorsque $z = 0$, on aura $\nu = c$; & par conséquent $A = \frac{1}{2} c c - \frac{c^4}{4r} + \frac{c^6}{6rr} - \frac{c^8}{8r^2} + \&c.$ & lorsque $\nu = 0$, on aura $z = \frac{1}{2} c c - \frac{c^4}{4r} + \frac{c^6}{6rr} - \frac{c^8}{8r^2} + \&c.$ pour la plus grande hauteur.

Ou

Ou en faisant $hr = cc$, cette dernière égalité deviendra $z =$
 $r h \times \text{par } \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{hh}{6} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{10} - \frac{h^5}{12} + \&c.$

Comme cette suite ne converge que fort lentement dans certains cas, on pourroit trouver la valeur de z , par le moyen de la méthode des différences : il est clair que si $hr = cc$, on aura $t = c \times \text{par } 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}hh - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 - \&c.$

PROBLEME II.

71. Si un corps joué dans une direction AE donnée, avec une vitesse quelconque c aussi donnée, est poussé ou attiré dans une direction perpendiculaire à la ligne horizontale AK, par une force quelconque ; l'on demande l'équation qui exprime la relation entre les abscisses AP, & les ordonnées PM correspondantes. Fig. 15.

Soit la partie TM de la tangente en M, $= z$, la perpendiculaire TR $= x$, MR $= y$, AP $= x$, PM $= y$, soit enfin RS perpendiculaire à MT : cela posé, en nommant p la force dans la direction PM, v la vitesse en M, t le tems de la description de l'arc AM, on aura $* vt = z$; & la force p dans la direction MR, est à son effet dans la direction MT, comme MR est à MS, ou à cause des triangles semblables, RMS, RMT, comme MT est à MR : cet effet sera donc exprimé par

$\frac{p y}{x}$: par conséquent $\frac{p y}{x} - R \times t = v$, ou $v \dot{v} = p \dot{y} - R \dot{z}$, par l'article 56.

La force p dans la direction MR, est à son effet dans la direction RS, perpendiculaire à la tangente comme MR est à RS, ou comme MT est à RT ; ainsi cet effet sera exprimé par $\frac{p z}{x}$: & comme la résistance ne change rien * dans cette direction, on aura la même équation $p \dot{y} \dot{z} + v \dot{z} = 0$, ou $p \dot{z}^2 + v \dot{y} = 0$, que dans l'article 13. Par le moyen de ces trois équations, celle qui exprime la relation entre les co-ordonnées x, y , sera connue lorsque la résistance R est donnée. Art. 58.

N. B. On doit remarquer ici, comme on a fait dans un milieu sans résistance, que si v & y augmentent ou diminuent ensemble, on a toujours $v \dot{v} = p \dot{y} - R \dot{z}$; mais si l'une de ces quantités augmente lorsque l'autre diminue, on doit avoir $v \dot{v} = -p \dot{y} - R \dot{z}$.

E X E M P L E.

72. Supposant la résistance du milieu, comme le quarré des vitesses, la force p constante & égale à l'unité, & le reste comme ci-devant, l'on demande la nature de la courbe décrite par le corps.

L'on aura $v\dot{v} = -p\dot{y} - R\dot{z}$, & $p\dot{y}\dot{z} + vv\dot{z} = 0$, en montant; & si $R = \frac{vv}{r}$, en mettant cette valeur, il viendra $v\dot{v} = -p\dot{y} - \frac{vv\dot{z}}{r}$; & si l'on met au lieu de p sa valeur, prise dans la seconde équation, $v\dot{v} = \frac{vv\dot{z}}{k} - \frac{vv\dot{z}}{r}$, ou en divisant par vv , & transposant le premier terme du second membre dans le premier, on aura enfin $\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\dot{z}}{k} = -\frac{\dot{z}}{r}$, dont la fluente est $\log. \frac{v}{k} = -\frac{\Delta z}{r}$; en supposant $k = 1$: & si q exprime le nombre dont le logarithme hyberbolyque est l'unité, on aura $\log. \frac{v}{k} = -\frac{\Delta z}{r} \log. q$,

& par conséquent $v = A k q^{-\frac{\Delta z}{r}}$.

Or en A , où $v = c$, $z = 0$; en nommant k le sinus de l'angle EAB d'élévation, on aura $k : k :: 1 : k$: ce qui donne $A = ck$:

par conséquent la dernière équation deviendra $v = ck k q^{-\frac{\Delta z}{r}}$. En mettant cette valeur de v dans $p\dot{z}^2 + vv\dot{y} = 0$, on aura $q^{\frac{\Delta z}{r}} + cck k \dot{y} = 0$, pour l'équation de la courbe.

Lorsque le corps est jetté dans la direction horizontale, comme du sommet D , k & $\dot{z}$ deviennent égales, & k égal à l'unité,

par conséquent $q^{\frac{\Delta z}{r}} = cck \dot{y}$, sera l'équation dans ce cas:

Pour avoir la fluente de l'une ou l'autre de ces équations, il n'y a que deux moyens que je sçache: l'un est par des suites infinies, & l'autre par la méthode des différences. Mais comme on trouve des difficultés dans l'un & l'autre cas, nous les donnerons tous les deux, afin de se servir de celui que l'on jugera à propos.

J'avois donné les problèmes sur la jettée des corps dans mes élémens de Mathématiques, par les suites infinies, sans y mettre la démonstration: mais je ne fis pas alors attention que les suites, telles que je les ai publiées, ne convergent que dans fort peu de cas; & ainsi elles ne peuvent être que de très-peu d'usage, sans faire quelque légère addition ou changement. En faisant cette

addition ou changement, on verra que c'est la plus courte méthode dont on puisse se servir, comme le lecteur en sera convaincu par ce qui suit.

PREMIERE MANIERE.

Pour résoudre le problème, il faut prendre la fluxion de l'équation — $q^{\frac{2x}{r}} = c c k k \dot{y}$, ce qui donne — $\frac{2x}{r} q^{\frac{2x}{r}} = c c k k \dot{y}$; la dernière étant divisée par la première, donne $r \dot{y} = 2 \dot{z} \dot{y}$. Or si l'on suppose y égale à une suite infinie composée de x & de ses puissances, comme la première égalité ci-dessous, on aura les autres en prenant la fluxion première, seconde & troisième; & en supposant la fluxion de x constante & égale à l'unité, afin de rendre le calcul plus simple & moins embarrassant.

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + fx^5.$$

$$\dot{y} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + 5fx^4.$$

$$\ddot{y} = 2b + 6cx + 12dx^2 + 20fx^3.$$

$$\ddot{\dot{y}} = 6c + 24dx + 60fx^2.$$

Le carré de la seconde, ajouté à l'unité, donne, en faisant $1 + aa = ss$,

$$\dot{z}^2 = ss + 4abx + 6acx^2 + 4bbx^3.$$

$$\text{dont la racine est } \dot{z} = s + \frac{2abx}{s} + \frac{3ac}{s} x^2.$$

parce que $ss - aa = 1$.

$$+ \frac{2bb}{s^3} x^3.$$

Ces valeurs étant mises dans l'équation $r \dot{y} = 2 \dot{z} \dot{y}$, donnera $6rc + 24rdx + 60rfxx = 4bs + 12csx + 24dsx^2$.

$$+ \frac{8abbx}{s} + \frac{36abcx^2}{s}.$$

$$+ \frac{2b^3x^3}{s^3}.$$

D'où égalant les coefficients des termes homologues, on aura $3rc = 2bs$, $6rd = 3cs + \frac{2abb}{s}$, $15rf = 6ds + \frac{3abc}{s} + \frac{2b^3}{s^3}$. A présent pour avoir les valeurs des deux premiers coefficients a & b , il faut considérer qu'en A, où $x = 0$, l'équation $Aa ij$

$\dot{y} = a + 2bx$, donne $\dot{y} = a$, ou $\dot{y} = ax$; ainsi $x : y :: 1 : a$, comme le rayon est à la tangente; ainsi le rayon étant l'unité, a exprimera la tangente de l'angle d'élévation, & comme $1 + aa = ss$, par supposition, il est clair que s exprime la sécante de cet angle, & l'égalité $\dot{y} = 2b + 6cx + \&c.$ donne aussi $\dot{y} = 2b$ dans ce cas, en mettant cette valeur dans $\dot{z} + vv\dot{y} = 0$, on aura $\dot{z} + 2bv = 0$; mais $\dot{z} = ss$ dans ce cas, & $vv = cc$; ou si l'on fait $h = cc$, on trouvera $-b = \frac{s^2}{2h}$. Cette valeur de b étant mise dans celle des coefficients, donne $-c = \frac{s^3}{3rb}$, $-d = \frac{s^4}{6rrb} - \frac{as^3}{12rbh}$, & $-f = \frac{s^3}{60rb^3} - \frac{2as^4}{15rrhb} + \frac{s^5}{15r^3b}$. Par conséquent $y = ax - \frac{s^2}{2b}x^2 - \frac{s^3}{3rb}x^3 - dx^4 - fx^5 - \&c.$ sera l'équation cherchée.

Lorsque la résistance devient nulle, r sera infinie, eu égard autres grandeurs, & on aura $y = ax - \frac{s^2}{2b}x^2$ dans ce cas, qui est précisément la même équation que nous avons trouvée dans la première partie, article 19, parce que $a = \frac{r}{k}$, & $s = \frac{1}{k}$.

Mais comme dans l'équation que nous venons de trouver, la valeur de y ne converge que fort peu, & qu'il est nécessaire que les cinq termes que nous avons donnés fussent dans tous les cas, il faut diminuer les valeurs de x & de y , de telle manière qu'on puisse toujours les avoir en quatre ou cinq décimales: or il y a plusieurs moyens pour cela; car on n'a qu'à diviser y & x par quelque grandeur connue, & mettre leurs quotiens, ou, ce qui revient au même, en mettant, au lieu de y & de x , leurs produits multipliés par quelque grandeur donnée, on aura une nouvelle équation, dans laquelle les valeurs de x & de y , seront d'autant diminuées que cette constante est grande: & après qu'on aura trouvé ces valeurs, il ne faut que multiplier l'une & l'autre par cette constante, pour avoir leurs valeurs véritables.

Or pour rendre l'équation la plus simple qu'il soit possible, nous mettrons ry , & rx , au lieu de y & x ; ce qui, en nommant $n = \frac{r}{b}$, donnera $y = ax - \frac{1}{2}nssx^2 - \frac{1}{3}ns^3x^3 - \frac{1}{4}ndx^4 - \frac{1}{5}nfx^5 - \&c.$ en supposant $d = \frac{2s^4 - ans^3}{3}$, & $f = \frac{1}{12}nns^3 - \frac{2}{3}ans^4 + \frac{1}{5}s^5$.

Il faut se souvenir que quand on a trouvé les valeurs de x &

de y , il faut les multiplier par r pour avoir leurs valeurs véritables, selon la supposition que nous venons de faire.

Si le corps est jeté dans une direction horizontale, a devient $= 0$, $s = 1$, & y devient négatif; par conséquent l'équation ci-dessus deviendra $y = \frac{1}{2} n x^2 + \frac{1}{3} n x^3 + \frac{1}{4} n x^4 + \frac{n^3 + 4n}{60} x^5$.

COROLLAIRE.

73. Puisque $v \dot{t} = \dot{z}$, $\dot{z}^2 = -v v \ddot{y}$, ou $\dot{z} = -\ddot{y}^{\frac{1}{2}} v$, on aura $\dot{t} = -\ddot{y}^{\frac{1}{2}}$: or en prenant la seconde fluxion de l'équation ci-dessus, en supposant toujours $\dot{x} = 1$, on aura $-\ddot{y} = n s s + 2 n s x + 3 n d x^2 + 4 n f x^3$, dont la racine est $\dot{t} = n^{\frac{1}{2}} x$ par $s + s s x + \frac{s^3 - s n s x}{2} x^2 + \&c$. Par conséquent $t = n^{\frac{1}{2}} x$ par $s x + \frac{1}{2} s s x^2 + \frac{s^3 - s n s x}{6} x^3$.

Quant à la vitesse dans un point donné, on n'a qu'à chercher le rapport entre $\dot{z}$ & $-\ddot{y}$, & on aura ce que l'on cherche, ce qui est évident, puisque $\dot{z}^2 + v v \ddot{y} = 0$.

PROBLEME III.

74. Si un boulet de canon, dont le diamètre est de cinq pouces, Fig. 19. est chassé sous un angle de 45 degrés avec une vitesse acquise en tombant (dans un milieu sans résistance) de 3000 pieds, l'on demande l'abscisse AB, correspondante à la plus grande ordonnée BD.

En supposant la fluxion de $\dot{y} = 0$, dans l'équation de la courbe, on aura $0 = a - n s s x - n s^3 x^2 - n d x^3 - n f x^4$: or, selon l'article 63, on aura $r = 6600$, & $h = 6000$ par supposition, $a = 1$, $s s = 2$, & $s = 1.4142$: donc $d = 1.6296$, $f = .7625$; par conséquent $n = 1.1$. Ces valeurs étant mises dans l'équation donnée $1 = 2.2 x + 3.11124 x^2 + 1.79254 x - .83875 x^3 + \&c$. ou seulement $1 = 2.2 x + 3.1 x^2 + 1.8 x^3 - .8 x^4$, ce qui suffit pour avoir la valeur en quatre décimales: or en faisant usage de la règle de Daniel Bernoulli, pour avoir la valeur de x , en supposant quatre unités pour les quatre premiers termes de la suite, on aura $6.3 : 17.96 : 60.04 : 198.3 : 649.67 : 2137.711 : 7025.85$: en divisant le penultième terme 2137.71 par le dernier, on aura $x = .3042$; ce qui étant multiplié par 6600, la valeur de r , selon ce que nous avons dit à la fin de l'article 72, on aura $AB = 2007$ pieds.

Pour ſçavoir ſi cette racine ou valeur de x eſt celle que l'on cherche, on n'a qu'à mettre les valeurs de x , x^2 , x^3 & x^4 , dans la premiere de ces équations ci-deſſus, & on trouvera $1 = 10003$, ce qui montre qu'il n'y a que les trois dix milliemes parties de trop.

P R O B L E M E I V.

75. *L'on demande la plus grande appliquée BD.*

En mettant les valeurs de a , s & n , dans celle de y , on aura $y = x \cdot 1.11x^2 - 1.037x^3 - .448x^4 + .1676x^5$; & comme $x = .3042$, $x^2 = .0925$, $x^3 = .0281$, $x^4 = .0085$, & $x^5 = .0026$: ces valeurs étant multipliées par les coefficients reſpectifs, donnent $y = .1699$, qui étant multiplié par 6600, la valeur de r donnera $BD = 1121$ pieds.

P R O B L E M E V.

76. *L'on demande la portée AK.*

En faiſant $y = 0$, dans la derniere équation, on aura $1 = 1.1x + 1.037x^2 + .448x^3 - .1677x^4$, d'où prenant encore quatre unités pour les quatre premiers termes de la ſuite, on aura 2.418 : 3.977 : 7.163 : 12.919 : 23.017 : 41.26 : 74.026 : 132.369 : 237.011 : 424.252; & en diviſant le pénultième terme 237.011 par le dernier, on aura $x = .5586$, & $AK = 3687$ pieds.

Pour ſçavoir ſi la racine trouvée eſt juſte, il ne faut que mettre les valeurs de x & de ſes puiſſances dans la derniere équation; on trouvera $1 = 1.00004$; ce qui eſt auſſi proche qu'il eſt poſſible.

P R O B L E M E VI.

77. *L'on demande la vîteſſe au ſommet D.*

* Art. 73.

Nous avons ſait voir * que la vîteſſe eſt exprimée par le rapport entre $-\dot{y}$ & $\dot{z}$; & comme $\dot{z}$ eſt égal à $\dot{x}$, ou l'unité au ſommet, on n'a qu'à diviſer l'unité par la valeur de $-\dot{y}$ pour avoir la vîteſſe demandée.

* Art. 73.

* Art. 73.

Or comme $-\dot{y} = n \cdot x$ par 2 + 5.6568 x + 4.8887 x^2 - 3.05 x^3 , & $n = 1.1$, $*x = .3042$, $x^2 = .0925$, $x^3 = .0281$; ces valeurs étant miſes dans cette égalité, donnent $-\dot{y} = 4.4961$; & en diviſant l'unité par ce nombre, on aura .2224, qui étant multiplié par 6600 la valeur de r , donnera $vv = 1468$ pieds.

Si l'on multiplie cette valeur par 32. 2, qui est la hauteur de la chute à Londres dans une seconde, & que l'on extraye la racine quarrée du produit, on trouvera 217. 4 pieds, pour l'espace parcouru dans une seconde de tems par cette vitesse uniformément continuée.

PROBLEME VII.

78. L'on demande le tems employé à parcourir l'arc AD.

Comme nous avons trouvé $* t = n^2 \times \text{par } s x + \frac{1}{2} s s x^2 + \dots$ Art. 73.
 $\frac{s^2 - a n s}{6}$, x^3 , en mettant les valeurs de a , s , on aura $t = n^2 \times \text{par}$
 $x. 4142 x + x^2 + .1047 x^3$; & comme $* x = .3042$, $x^2 = .0925$, $x^3 = .0281$; ces valeurs étant mises, donnent $t = n^2 \times$
 $.5256$: or comme les quarrés des tems sont dans la raison des espaces décrits, il faut multiplier cette valeur par la racine quarrée de r , & non point par r ; mais $\sqrt{r n} = \sqrt{h} = 77.46$ pieds; par conséquent, on aura $t = 40.712976$ pieds, qu'il faut diviser par par 4.0124, racine quarrée de 16. 1 pieds, qui est la hauteur de la chute dans une seconde, pour avoir le tems exprimé en secondes, qui est par conséquent de 10. 15 secondes.

PROBLEME VIII.

79. L'on demande la vitesse en K, ou à la fin de la chute.

Nous avons trouvé $* -y = n \times \text{par } 2 + 5.6568 x + 4 \dots$ Art. 77.
 $8887 x^2 - 3.05 x^3$, & $* x = .55867$, $x^2 = .31211$, $x^3 = .17436$, & $n = 1.1$; en mettant ces valeurs, on aura $-y = 6.7697$; mais comme $* \dot{z}^2 + v v \dot{y} = 0$, il faut trouver la valeur de $\dot{z}^2$, pour avoir la valeur de la vitesse; ce qui se fait en trouvant celle de $\dot{y}$, au quarré de laquelle il faut ajouter l'unité, celle de $\dot{z}^2$; ainsi, puisque $\dot{y} = a - n s s x - n s^2 x^2 - n d x^3 + n f x^4$, & $a = \frac{1}{2}$, $n = 1.1$, $s s = 2$, $d = 1.6295$, & $f = .7625$; ces valeurs étant mises, donnent $\dot{y} = -1 + 2.2 x + 3.112 x^2 + 1.7924 x^3 - .8387 x^4$, parce que $\dot{y}$ est ici négatif. D'où en mettant les valeurs de x & de ses puissances, on trouvera $\dot{y} = 1.43095$, & son quarré ajouré à l'unité, donne $\dot{z}^2 = 3.0476$, qui étant divisé par 6.797, la valeur de $-y$ donne enfin .45 à peu près, & $v v = .45 \times r = 2970$ pieds: or si l'on multiplie ce nombre par 32. 2, l'espace parcouru uniformément dans une seconde de tems, & que l'on extraye la racine quarrée du produit

95634, on aura enfin 309 pieds pour l'espace parcouru uniformément par cette vitesse dans une seconde de tems.

C O R O L L A I R E.

80. Il est manifeste que la valeur 1. 43095 de y , que nous venons de trouver, exprime la tangente de l'angle fait par la courbe & la portée A K en K, laquelle répond à un angle de 55 degrés & 3 minutes.

P R O B L E M E I X.

81. *L'angle d'élevation & la vitesse projectile étant donnés, l'on demande le point M, où le corps rencontre un plan incliné A M, dont l'angle qu'il fait avec la ligne horizontale A P, est connu, la résistance étant comme le quarré de la vitesse.*

Soit $A P = x$, & la tangente de l'angle P A M, p , on aura $P M = p x$. D'où en mettant $y = p x$, au lieu de y , dans l'équation ci-devant, on aura $y = a + p x$, $x = \frac{1}{2} n s s x^2 - \frac{1}{2} n s^3 x^3 - \frac{1}{2} n d x^4 + \&c.$

Soit à présent le quarré de la vitesse c projectile de 6600 pieds, c'est-à-dire, égale à la valeur de r , l'angle d'élevation avec l'horizon de 45 degrés, & l'angle d'inclinaison de 5 degrés & 43 minutes, dont la tangente est .1001, mais comme $a = 1$, $s s = 2$, $n = 1$, $d = 1.7239$, $f = .54536$, en supposant $y = 0$, & mettant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on aura $1 = x + .9428 x^2 + .431 x^3 - .109 x^4 + \&c.$ Or en divisant par 1.1, pour réduire l'équation égale à l'unité, & en cherchant la racine, on ne trouvera pas ce que l'on cherche; mais si l'on met $.5 + x$, au lieu de x , il viendra $1 = 6.97 x + 4.49 x^2 + 67 x^3 + \&c.$ En supposant un zero & deux unités pour les trois premiers termes de la suite, on aura 0, 1, 1, 12.13, 89.7, 680.34, 5152.85. Et en divisant le pénultième terme par le dernier, on aura $x = .1324$ & par conséquent $.5 + x = x = .632$, qui étant multiplié par 6600, la valeur de r , donnera $A P = 4171.4$ pieds.

Pour sçavoir si la valeur de x est juste, il ne faut que la substituer dans la premiere équation, & on trouvera $1 = 1.00019$; ce qui est fort proche de la véritable racine.

Si l'objet qu'on doit frapper est au dessous de la ligne horizontale, comme dans la dix-septieme figure, il faudra mettre $y + p x$, au

au lieu de y , dans l'équation de la courbe, & trouver ensuite la racine de la même manière que ci-dessus.

Seconde manière de résoudre les mêmes problèmes par la méthode des différences.

PROBLEME.

81. *L'on demande les valeurs des abscisses AP, & ordonnées Fig. 15: PM, lorsque l'angle d'élévation & la vitesse projectile sont donnés.*

Nous avons trouvé $* q^{\frac{1x}{r}} = cc \bar{y}$, lorsque c exprime la vitesse * Art. 27: au sommet D; & en supposant toujours $\bar{x}$ égale à l'unité, on aura $\bar{z} = \sqrt{1 + \bar{y}^2}$; d'où en multipliant le premier membre de l'équation $q^{\frac{1x}{r}} = cc \bar{y}$ par $\bar{z}$, & le second par son égal, on aura $\bar{z} q^{\frac{1x}{r}} = cc \bar{y} \sqrt{1 + \bar{y}^2}$, dont la fluente est $\frac{r}{2} q^{\frac{1x}{r}} = A + cc \bar{y} \sqrt{1 + \bar{y}^2} + cc \times \log. \bar{y} + \sqrt{1 + \bar{y}^2}$; ou en supposant la fluente de $\bar{y} \sqrt{1 + \bar{y}^2} = n$, on aura $\frac{r}{2} q^{\frac{1x}{r}} = A + cc n$; mais au sommet D, on a $\bar{z} = \bar{y} = 0$, & $q^{\frac{1x}{r}} = 1$: donc $\frac{r}{2} = A$; & par conséquent $q^{\frac{1x}{r}} = 1 + \frac{2ccn}{r}$. Cette valeur étant mise dans * Art. 72:

$cc \bar{y} q^{\frac{1x}{r}}$, ou $v \bar{y} q^{\frac{1x}{r}} = cc \bar{z}^2$, donne $v \bar{y} = \frac{rcc\bar{z}^2}{r + 2ccn}$; d'où l'on voit que le rapport entre les vitesses au sommet & à un point quelconque, dont l'angle T est donné, est exprimé par cette équation.

Pour avoir les valeurs de $\bar{x}$ & de $\bar{y}$, il ne faut que mettre la valeur $1 + \frac{2ccn}{r}$ de $q^{\frac{1x}{r}}$, dans l'égalité $q^{\frac{1x}{r}} = cc \bar{y}$, on aura $1 = \frac{rcc\bar{y}}{r + 2ccn}$; d'où en multipliant chaque membre par $\bar{y}$, il viendra $\bar{y} = \frac{rcc\bar{y}^2}{r + 2ccn}$; & si l'on multiplie le premier membre de la même équation par $\bar{x}$, & le second par son égal, c'est-à-dire, par l'unité, on aura $\bar{x} = \frac{rcc\bar{y}}{r + 2ccn}$; ou en faisant $\frac{r}{cc} = p$, ces deux

Bbb

dernieres équations deviendront $y = \frac{r \dot{y} \ddot{y}}{r + 2n}$, & $\dot{x} = \frac{r \dot{y}}{r + 2n}$.

Il faut remarquer que les équations que nous venons de trouver des vitesses & des co-ordonnées, sont pour la descente du corps, en commençant au sommet D; mais lorsque le corps monte, n devient négative, ce qui donne $vy = \frac{rcc\dot{x}^2}{r - 2cn}$, $y = \frac{r \dot{y} \ddot{y}}{r - 2n}$, & $\dot{x} = \frac{r \dot{y}}{r - 2n}$ dans ce cas.

Puisque l'équation $vt = z$ des tems, devient $ct = \dot{x} q^{\frac{z}{r}}$, en mettant la valeur de v prise dans $v\dot{x} = c\dot{z} q^{\frac{z}{r}}$, & de ce que nous avons trouvé ci-dessus que $q^{\frac{z}{r}} = \sqrt{1 - \frac{2cen}{r}}$, & $\dot{x} = \frac{r \dot{y}}{r - 2n}$; en substituant ces valeurs dans l'équation des tems aussi-bien que p pour $\frac{r}{cc}$, on trouvera enfin $t = \frac{r^{\frac{1}{2}} \dot{y}}{\sqrt{p - 2n}}$.

E X E M P L E.

83. Supposant qu'un boulet de canon de 18 livres, soit chassé sous un angle de 45 degrés, avec une vitesse acquise en tombant de la hauteur de 3000 pieds, dans un milieu sans résistance, l'on demande l'abscisse AB, correspondante à la plus grande ordonnée BD.

On a $r = 6600$, $vy = 6000$; & comme il est nécessaire d'avoir la vitesse c au sommet, on se servira de l'équation $vy = \frac{rcc\dot{x}^2}{r - 2ccn}$, d'où l'on tire $cc = \frac{rvy}{r\dot{x}^2 + 2nvy}$; mais comme z exprime la sécante d'un angle de 45 degrés, dont le rayon est l'unité, on aura $2 = z^2$; & y exprimant la tangente de cet angle, sera

égal à l'unité, ce qui donne $n = y \sqrt{1 + y^2} + \log. y + \sqrt{1 + y^2} = 1.1478$: ces valeurs étant mises dans celle de cc , donnent $cc = 1468$ pieds, ce qui est précisément la même que celle que nous avons trouvée dans l'article 77.

En divisant 6600 la valeur de r , par 1468 celle de cc , on aura $p = 4.4959$: mais pour trouver la valeur de AB, il est à propos de donner auparavant une petite table des valeurs de $2n$, selon les valeurs que l'on supposera pour y ; par ce moyen les

opérations deviendront plus aisées & plus courtes, comme on verra ci-après. La première colonne, formée des nombres placés sous y , expriment les valeurs de y ; & la seconde, celles de $2n$ correspondantes à celles de y , qui sont à côté.

y	$2n$	$\frac{1}{4}$	.50688	$\frac{1}{2}$	.82091	$\frac{3}{4}$	.25077
1	2	$\frac{1}{2}$	.04017	1	.26642	$\frac{1}{2}$	.76712
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	.63064	1	.75720	$\frac{1}{4}$	.31727
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{8}$	.40265	$\frac{1}{2}$	.33500	$\frac{1}{8}$	.95340

Or si l'on suppose à présent que l'espace dont $x = \frac{y}{p-1}$ est la fluxion, soit divisé en six parties par sept ordonnées également distantes les unes des autres, on aura les parties de la base y , comme il suit, $0 : \frac{1}{6} : \frac{2}{6} : \frac{3}{6} : \frac{4}{6} : \frac{5}{6} : \frac{6}{6}$, ou $0 : \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{5}{6} : 1$. En soustrayant les valeurs correspondantes de $2n$, de 4.49591, celle de p , & en divisant l'unité par les différences, on aura les valeurs des ordonnées correspondantes .22142 : .24033 : .26197 : .28938 : .32578 : .37698 : .45454. D'où en faisant la somme de la première & dernière égale à A, celle de la seconde & pénultième B, celle de la troisième & une pénultième C, & la quatrième D, on aura $A = .6769$, $B = .61731$, $C = .58775$, & $D = .28938$. En mettant ces valeurs dans l'expression générale des espaces terminés par sept ordonnées, qu'on a données dans une Table, où nous avons traité de la méthode des différences; sçavoir dans $\frac{41A + 216B + 27C + 271D}{840} R$, on trouvera 255.67247, pour le numérateur, parce que la base R est ici égale à l'unité; lequel étant divisé par le dénominateur 840, donne .30437; ce quotient étant multiplié par 6600, la valeur de r donnera enfin $x = AB = 2009$ pieds; ce qui excède de deux pieds seulement la valeur de cette abscisse trouvée ci-devant.

E X E M P L E.

84. L'on demande la valeur de la plus grande appliquée BD.

Puisque $y = \frac{r y^2}{p-1}$, l'on voit qu'il ne faut que multiplier les ordonnées trouvées ci-dessus, par les valeurs correspondantes de y , pour avoir les ordonnées de cet espace, ou de la valeur de y ; ce qui donne $0 : .040055 : .08732\frac{1}{2} : .14469 : .21718\frac{1}{2} : .31415 :$
Bbb ij

.45454, d'où l'on a $A = .45454$, $B = .354205$, $C = .30451$, & $D = .14469$: en mettant ces valeurs dans l'expression générale ci-dessus, on aura $142.7^{\circ}2'$, pour le numérateur, qui étant divisé par le dénominateur 840, donne .1699, & $B D = y = 1121$ pieds ; ce qui est précisément la même valeur trouvée ci-devant.

E X E M P L E.

85. *L'on demande la partie BK de la portée.*

Pour trouver la valeur de cette partie, il faut trouver auparavant la tangente y de l'angle en K, afin d'avoir la valeur de n . Pour cet effet, soit QN parallèle à la base BK, & telle que la tangente y en N, soit l'unité. Cela posé, on se servira des équations $x = \frac{r y}{p + 1 n}$, $y = \frac{r y}{p + 1 n}$, pour avoir DQ & QN, en supposant cinq ordonnées, ce qui donne $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, pour les valeurs de y : en divisant l'unité par la somme de la valeur de p , 4.49559, & les valeurs correspondantes de $2n$, on aura .22244 : .1999 : .18064 : .16457 : .14725 ; ce qui donne $A = .36969$, $B = .36447$, $C = .18064$. Or ces valeurs étant mises dans l'expression générale $\frac{7A + 3B + 1C}{90} R$, de l'espace compris par cinq ordonnées, on trouvera 16.41855 pour le numérateur, qui étant divisé par le dénominateur 90, donne x , ou QN = $r x$.18294 = 1204 pieds.

A présent pour avoir la valeur de DQ, il faut multiplier chaque ordonnée trouvée ci-dessus par sa base, c'est-à-dire, par $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$; ce qui donne 0 : .04997 : .09032 : .12342 : .14725, d'où l'on a $A = .14725$, $B = .1733$, & $C = .09032$; ces valeurs étant mises dans l'expression générale ci-dessus, donne 7.66, qui étant divisé par le dénominateur 90, donne DQ = $y = r x$.0851 = 561.66 pieds.

Il s'agit à présent de trouver une valeur de y , telle que l'espace que l'on trouve par le moyen de l'équation $y = \frac{r y}{p + 1 n}$, soit égal à BQ ; car quand on aura trouvé cette valeur, il ne faut que l'ajouter à l'unité, qui est celle de y en N, pour avoir celle en K ; & ayant une fois cette dernière valeur, on trouvera aisément la différence entre QN & BK.

Ainsi en retranchant la valeur .0851, de 1699 la valeur de

BD, on aura $BQ = .0848$; laquelle étant divisée par la dernière ordonnée .14725, donne .577, ce qui doit être plus grand que la valeur de j , demandée: ainsi prenant .54, pour cette valeur, & en cherchant les valeurs de $2n$, qui correspondent à 1.27 & 1.54, on trouvera 3.1128, 4.0444, pour ces valeurs, lesquelles étant ajoutées à 4.49559 celle de p , & l'unité divisée par leurs sommes, donne .13143 & .11709, pour les ordonnées correspondantes.

La somme de l'ordonnée .14725, qui correspond à l'unité, & la dernière .11709 étant ajoutée à quatre fois la première .13143, & la somme multipliée par la base .54, donne .4266, pour le produit, qui étant divisé par 6, donne $x = rx = .0711 = 469.26$ pieds.

Or si l'on multiplie l'ordonnée .13143, par sa distance 1.27; & .11709, par la sienne 1.54, on aura .1669, & .1803; en ajoutant quatre fois l'ordonnée .1669 à la somme de .1803, & l'ordonnée .14725 correspondante à l'unité, on aura .995, qui étant multiplié par la base .54, & divisé par 6, donne 0895; ce qui ne diffère de 0848 que de 0047, d'où l'on voit que la valeur supposé de j est un peu plus qu'elle ne devoit être.

En ajoutant la différence 469.26 pieds entre BK & QN, à la valeur 1204 pieds, on aura BK = 1673 pieds, & AK = 3682 pieds; ce qui diffère de cinq pieds de cette valeur que nous avons trouvée par la première méthode.

Troisième manière pour résoudre les mêmes problèmes.

Nous avons donné une équation à la fin du 72^{me} article, qui contient le rapport des abscisses & ordonnées, dont l'origine est au sommet D; mais en supposant $\frac{r}{c} = n$, comme nous avons fait dans cet article, après avoir mis ry , & rx , au lieu de y & de x ; il vaut mieux dans ce cas-ci, supposer $2cc = h$, & mettre hy & hx , au lieu de y & de x ; & après avoir fait $\frac{h}{r} = n$,

l'équation deviendra $y = x^3 + \frac{2n}{3} x^3 + \frac{1}{3} n n x^4 + \frac{2n^3 + 2n}{15} x^5$
 $+ ex^6 + fx^7$; en supposant $e = \frac{2n^4 + 14nn}{45}$, & $f = \frac{4n^5 + 128n^3 + 12n}{315}$.

Il est à observer qu'on a été obligé de pousser cette suite plus loin que la première, parce que x devient négative dans la

montée, & les termes où l'exposant de x est impair, deviennent négatifs, ce qui fait que la suite ne converge pas si vite que dans le premier cas.

E X E M P L E.

86. Supposant la vitesse en A, de 3000 pieds comme ci-dessus, & l'angle d'élévation de 45 degrés aussi-bien que $r = 6600$, l'on demande la valeur de l'abscisse AB, qui corresponde à la plus grande appliquée BD.

* Art. 77.

Nous avons trouvé * 1468 pieds pour la vitesse au sommet D, en négligeant les décimales, qui n'étoient d'aucunes conséquences dans ce cas, qui cependant deviennent nécessaires ici; ainsi cette vitesse est de 1468.1054 pieds; ce qui donne $h = 2936.208$, & $n = .44488$, d'où l'on tire $n^2 = .19792$, $n^3 = .08805$, $n = .039171$, & $n^4 = .017426$.

Or si l'on change les signes des termes où l'exposant de x est un nombre impair, & que l'on prenne la fluxion de l'équation, on aura $y = 2x - 2nx^2 + \frac{4}{3}nnx^3 - \frac{2n^3 + 1}{3}x^4 + 6ex^5 - 7fx^6$; & comme y exprime la tangente de l'angle d'élévation en A, qui est de 45 degrés par supposition, on aura $y = 1$; & en mettant les valeurs de n & de ses puissances, la dernière équation deviendra $1 = 2x - .88976x^2 + .26389x^3 - .35529x^4 + .377989x^5 - .13337x^6$, d'où en supposant six unités pour les premiers termes de la suite, on aura 1. 26536 : 1. 79608 : 2. 62141 : 3. 86988 : 5. 67825 : 8. 3142; & en divisant le pénultième terme 5. 67825, par le dernier 8. 3142, on trouvera $x = .6829$; ce qui étant multiplié par 2936. 2108, la valeur de h , donne AB = 2005 pieds; ce qui ne diffère que de deux pieds de cette distance que nous avons trouvée par la première manière.

Pour sçavoir si la racine trouvée de l'équation ci-dessus est juste, il ne faut que mettre les valeurs .6829, .46635, .35847, .21748, .14852, .10142, de $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$, dans cette équation, & on trouvera $y = 1.00073$, ce qui est assez juste.

E X E M P L E.

87. L'on demande la plus grande hauteur BD, à laquelle le corps monte,

En mettant les valeurs de n & de ses puissances trouvées dans le dernier exemple dans l'équation $y = x^2 - \frac{1}{2} n x^3 + \frac{1}{2} n n x^4 - \frac{2n^2 + 1}{5} x^5 + e x^6$, on aura $y = x^2 - .29658 x^3 + .06597 x^4 - .07106 x^5 + .06331 x^6$; & si l'on met les valeurs des puissances de x , trouvées ci-dessus, on trouvera $y = .382$; ce qui étant multiplié par 2936. 21, la valeur de h , donnera $BD = 1121.6$ pieds; ce qui est précisément la même chose que ce que nous avons trouvé par les deux manières précédentes.

E X E M P L E.

88. *Ayant la valeur de BD, l'on demande la partie BK de la portée.*

Comme $y = .382$ par le dernier article, on aura $.382 = x^2 + .29658 x^3 + .06597 x^4 + .07106 x^5 + .06331 x^6$, ou en divisant par $.382$, il viendra $1 = 26178 x^2 + .77638 x^3 + .172696 x^4 + .18602 x^5 + .16573 x^6$, dont la racine quarrée est $1 = 1.6179x + .2399x^2 + .0356x^3 + .0522x^4 + .0507x^5$. Or en supposant cinq unités pour les cinq premiers termes de la suite, on aura 1. 9963, 3. 6082, 6. 4551, 11. 4833, 20. 4107; d'où en divisant le pénultième terme 11. 4833 par le dernier 20. 4107, on trouvera $x = .5626$, qui étant multiplié par 2936. 21, la valeur de h , donne $BK = .1652$ pieds; & si à cette valeur on ajoute 2005 pieds, la partie AB , on aura $AK = 3657$ pieds, pour la portée entière; ce qui diffère de 30 pieds de ce que nous avons trouvé ci-devant: la cause de cette différence vient apparemment de ce que nous avons fait quelque faute dans le calcul numérique; mais nous n'avons pas le remède de l'examiner à présent, étant satisfait de ce que la méthode est juste: le lecteur est prié de prendre la peine de le corriger lui-même.

P R O B L E M E.

89. *La portée AK, & la vitesse projectile en A, étant données, l'on demande le sinus de l'angle d'élévation.*

En supposant $y = 0$, dans l'équation $*y = ax - \frac{1}{2} n s s x^2 -$ **Art. 71.*
 &c. on aura $a = \frac{1}{2} n s s x + \frac{1}{2} n s^2 x^2 + \frac{1}{4} n d x^3 + \frac{1}{4} n f x^4 +$ &c.
 & x exprimera la portée donnée dans ce cas. Or si l'on nomme le sinus de l'angle d'élévation γ , son cosinus u , on aura $a = \frac{z}{u}$, $s =$

$\frac{1}{2}$; ces valeurs étant substituées, donnent $z = n \times \text{par } \frac{x}{2n} + \frac{nx}{3n} - \frac{1}{2}$
 $\frac{2 - nx}{12n^3} x^3 + \frac{1 - 2nx}{15n^4} x^4$; d'où par le retour des suites, on aura $x =$
 $\frac{2x}{n} - \frac{8x^2}{3n^3} + \frac{40x^3}{9n^3} - \frac{448x^4}{17n^4} + \&c.$
 $-\frac{x^3}{n} - \frac{32x^4}{3n^3} + \&c.$
 $-\frac{8x^4}{15}.$

Après avoir mis $1 - \frac{2x}{2} + \&c.$ au lieu de u , qui lui est égal par la propriété du cercle.

Ayant ainsi la valeur de x exprimée par le sinus cherché, on trouvera la valeur du sinus exprimé par x , &c de ses puissances, par le moyen du retour des suites, comme il suit

$$z = \frac{nx}{2} + \frac{nx^3}{3} - \frac{nx^5}{6} + \frac{nx^7}{3} + \&c.$$

$$+ \frac{n^3x^3}{16} + \frac{9n^3}{40}x^4 + \&c.$$

Or si l'on nomme A le sinus de l'angle double de celui d'élévation, à cause que ce sinus est égal à $2z - z^2 + \&c.$ en substituant ces valeurs prises dans la dernière équation, on trouvera $A = nx + \frac{1}{3}nx^3 + \frac{1}{3}nx^5 + \frac{1}{3}nx^7 + \frac{1}{3}n^3x^3 + \&c.$

E X E M P L E.

90. Supposant la même chose, quant aux valeurs des lettres; que dans le 76^{me} article, l'on demande le sinus double de l'angle d'élévation.

Comme on a trouvé $x = .5586$, $n = 1.1$, on aura $x^3 = .31203$, $x^5 = .17418$, $x^7 = .09735$: ces valeurs étant mises dans la dernière équation, on aura $A = 1.00448$; ce qui s'accorde assez bien, puisque l'angle d'élévation doit être de 45 degrés, &c son double de 90, dont le sinus est l'unité.

R E M A R Q U E.

Voilà ce que nous nous étions proposé de dire sur l'art de jeter les bombes dans un milieu résistant, parce qu'il semble que les autres hypothèses sur la résistance ne se rencontrent que fort rarement dans la nature, du moins dans l'air; &c il auroit été fort chagneyeux d'étendre une matière si épineuse que celle-ci, plus

plus qu'il n'est nécessaire : au reste, les exemples que nous venons de donner, suffisent pour éclaircir le sujet, & pour faire voir au lecteur, comment il faut s'y prendre dans d'autres cas qui pourroient se présenter.

Nous avons choisi les mêmes exemples dans les trois manières différentes de résoudre les mêmes problèmes, afin d'être assurés qu'ils mènent également au même but, & qu'ils s'accordent parfaitement bien ensemble : car quand on considère qu'il est presque impossible qu'on ne commette quelque petite erreur dans des calculs numériques aussi difficiles que ceux-là, on excusera aisément les petites différences qui se trouvent dans quelques-unes des parties.

Comme aucun Auteur que je sçache, n'a réduit ces problèmes au calcul numérique, qui est cependant nécessaire pour les pouvoir appliquer à la pratique, on espère que ce que nous venons de dire ne sera pas désapprouvé du public : nous aurions même été bien aises de comparer la théorie avec les expériences qu'on a faites sur ce sujet, si nous en avions eu le tems. Mais comme la partie de cet ouvrage est déjà imprimée il y a long-tems, nous n'avons pas voulu en retarder plus long-tems la publication. Avant que de finir, il nous reste encore quelques problèmes sur le mouvement des pendules dans un milieu résistant, que nous allons exposer d'autant plus volontiers, qu'ils ont été donnés par le Chevalier Newton dans le second Livre de ses Principes, mais d'une manière si obscure & si courte, que quelques Sçavans ont cru qu'il s'étoit trompé, quoique ce soient eux-mêmes, parce qu'ils se sont jetés dans des calculs très-embarrassans ; de sorte qu'il étoit presque impossible de ne se pas méprendre.

PROBLÈME.

91. *Supposant qu'un corps a commencé son mouvement au point E, étant pressé par la force de gravité uniformément dans un milieu dont la résistance est comme le quarré des vitesses, l'on demande la vitesse dans un point quelconque M dans une courbe donnée ; & le tems que le corps emploie à décrire l'arc EM.*

Soient tirées EB & MP perpendiculaires à l'axe AB ; si l'arc $EM = z$, $BP = y$, on aura $v \dot{v} = P y - R z$ dans la descente, & $P y \dot{z} + y v \dot{z} = 0$.

En mettant cette dernière valeur de $P y$, & $\frac{v \dot{v}}{y}$ pour R, dans

C c c

la premiere équation, on aura $v\dot{z} = -\frac{v\dot{v}\dot{z}}{\dot{z}} - \frac{v\dot{v}\dot{z}}{r}$, ou $\frac{\dot{z}}{v} + \frac{\dot{z}}{r} = -\frac{\dot{z}}{r}$, dont la fluente est $\log. \frac{v\dot{z}}{\dot{z}} = -\frac{z}{r}$, parce que $\dot{z}$ a été supposée constante : or il est nécessaire de diviser le premier membre de l'équation par cette quantité, afin de rendre les parties homogènes, ou en nommant q le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura $v\dot{z} = \dot{z} q^{-\frac{z}{r}}$: & comme $v\dot{t} = \dot{z}$, ou trouvera $t = \frac{z}{\dot{z}} q^{-\frac{z}{r}}$. Par conséquent la courbe étant donnée, la vitesse & le tems seront déterminés, comme on va voir.

E X E M P L E.

92. Soit AME la moitié de la cycloïde ordinaire, ANB son demi-cercle générateur; par la propriété de cette courbe, la corde AN est toujours parallèle à la tangente en M. Ainsi si le diamètre AB du cercle générateur est l'unité, & si PB = y , on aura PN = $\sqrt{y - yy}$, & AN = $\sqrt{1 - y}$, par la propriété du cercle : donc AN : PN, ou $1 : y^{\frac{1}{2}} :: \dot{z} : \dot{x} = \dot{z} y^{\frac{1}{2}}$. Cette valeur de $\dot{x}$ étant substituée dans celle des vitesses & du tems, trouvée dans le dernier article, donne $v = y^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{z}{r}}$, & $y^{\frac{1}{2}} \dot{t} = \dot{z} q^{-\frac{z}{r}}$.

Dans un milieu sans résistance, la quantité r est infinie, & ainsi $q^{-\frac{z}{r}} = 1$; & par conséquent on aura $v = y^{\frac{1}{2}}$, & $y^{\frac{1}{2}} \dot{t} = \dot{z}$ dans ce cas; ce qui s'accorde avec ce qu'on trouve par le moyen des principes dans un milieu sans résistance.

P R O B L E M E.

93. L'on demande la différence mM, entre les arcs décrits, dans la descente & dans la montée immédiate dans la cycloïde, lorsque la résistance est comme le quarré des vitesses.

Comme $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2$, & $\dot{x} = \dot{z} y^{\frac{1}{2}}$, ou $\dot{x}^2 = y \dot{z}^2$, par l'article dernier; ainsi $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 + y \dot{z}^2$, d'où l'on tire $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - y}}$, dont la fluente est $z = 2\sqrt{1 - y}$, ou AM = 2 AN; & la moitié AME de la cycloïde est le double du diamètre AB du cercle générateur.

Si à présent l'on nomme l'arc $AM = a$, l'arc $Am = v$, $AP = b$, & $Ap = x$, à cause que $a = 2\sqrt{b}$, $v = 2\sqrt{x}$, on aura $aa - vv = 4b - 4x$, ou si $Mm = z$, on aura $a - z = v$, ou $aa - 2az + zz = vv$; ainsi $\frac{2az - zz}{4} = b - x = y$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{2az - zz} = y$; en supposant $Pp = y$, cette valeur de y étant substituée dans $v = y^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{x}{r}}$, donne $v = \frac{1}{2}\sqrt{2az - zz} \times q^{-\frac{x}{r}}$. Or il est évident que le point de la courbe où la vitesse est la plus grande, divise l'arc entier décrit dans une oscillation en deux parties égales; donc en faisant la fluxion de la vitesse v égale à zéro, on aura $\frac{a - z}{\sqrt{2az - zz}} - \frac{1}{r}\sqrt{2az - zz} \times q^{-\frac{x}{r}} = 0$; & par conséquent $ar - rz = 2az - zz$, ou $-rz - 2az + zz = -ar$, dont la racine quarrée est $\frac{1}{2}r + a - z = \frac{1}{2}\sqrt{rr + 4aa} = \frac{1}{2}r + \frac{aa}{r} - \frac{a^2}{2r} + \&c.$ ou $a - z = \frac{aa}{r} - \frac{a^2}{2r} + \&c.$ Or ceci est la moitié de la différence entre les arcs décrits en descendant & en montant: en doublant cette valeur, on aura $\frac{2aa}{r} - \frac{a^2}{r} + \&c.$ pour la différence cherchée.

L E M M E I.

94. En supposant $A = z\zeta^{r^{n-1}}\nu^{m-1}$, $B = z\zeta^{r^{n+n-1}}\nu^{m-1}$, & $\nu = e - f\zeta^n$, on aura $erA - r+m, n fB = \zeta^{r^n}\nu^m$; ce qui a été démontré dans la première partie de cet ouvrage.

L E M M E I I.

95. Supposant $\nu = e - f\zeta^n$, comme ci-dessus, il s'agit de trouver la fluente de $z\zeta^{r^{n-1}}\nu^{m-1} \times 1 + \zeta^n + \zeta^{2n} + \zeta^{3n} + \&c.$ lorsque $\nu = 0$, ou $e = f\zeta^n$.

Si $A, B, C, D, \&c.$ expriment les fluentes des termes dans l'ordre qu'ils sont placés, on aura $erA - r+m, fB = \frac{1}{s}\zeta^{r^n}\nu^m$, & lorsque $\nu = 0$, on aura $B = \frac{erA}{f, r+m}$; ou si $r+m = s$, on aura $B = \frac{erA}{f}$.

Ccc ij

Or r étant augmentée d'une unité dans chaque terme de la fluxion $\dot{z} z^{r-1} y^{m-1} \times 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + \&c.$ & le reste des quantités demeurant les mêmes; si l'on met $r+1, s+1, \& r+2, s+2, \&c.$ dans $B = \frac{r}{f} A$; alors les termes A & B , deviendront successivement les termes $B, C, D, \&c.$ sçavoir, $\frac{r}{f} \times \frac{1+r}{1+r} B = C$, $\frac{r}{f} \times \frac{1+r}{1+r} C = D$, ainsi en mettant la valeur de B dans celle de C , & celle de C dans celles de D , elles deviendront $\frac{r}{f} \times \frac{r+1+r}{1+1+r} A = C$, & $\frac{r}{f} \times \frac{r+1+r+1}{1+1+1+r} A = D$. Par conséquent la fluente cherchée sera $A \times \text{par } 1 + \frac{r}{f} + \frac{r}{f} \times \frac{r+1+r}{1+1+r} + \frac{r}{f} \times \frac{r+1+r+1}{1+1+1+r} + \&c.$ Comme la loi de cette suite est connue, elle peut être continuée à volonté.

P R O B L E M E.

96. L'on demande le tems d'une oscillation complète dans une cycloïde, lorsque la résistance est comme le quarré des vitesses.

Si a exprime la longueur de l'arc de la cycloïde décrite, comme $y = \frac{1}{2} \sqrt{2az - zz}$, & $t = \frac{z}{\dot{z}}$, on aura $t = \frac{z}{\sqrt{az - zz}}$, ou à cause que $\frac{z}{\dot{z}} = 1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{2rr} + \frac{z^3}{6r^2} + \&c.$ on a $t = \frac{z}{\sqrt{az - zz}} \times 1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{2rr} + \frac{z^3}{6r^2} + \&c.$

Mais il est clair que lorsque $z = a$, la fluente de cette fluxion exprime le tems d'une oscillation entière, & que la fluente de $\frac{z}{\sqrt{az - zz}}$ exprime la circonférence du cercle dont le diamètre est l'unité.

Or si l'on compare cette fluxion avec la formule générale ci-dessus $\dot{z} z^{r-1} \times e - f z^{n-1}$, on aura $n = 1, rn - 1 = -\frac{1}{2}$, $m - 1 = -\frac{1}{2}$, ou $r = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}, r + m = s = 1, f = 1$, & $a = e$. Par conséquent la fluente du dernier article deviendra

$A \times 1 + \frac{a}{2r} + \frac{3a^2}{16r^2} + \frac{5a^3}{96r^3} + \&c.$ lorsque A exprime la circonférence de cercle dont le diamètre est l'unité.

COROLLAIRE.

97. Delà il suit (puisque A exprime le tems d'une oscillation d'un pendule qui décrit une cycloïde dans un milieu sans résistance, & $A \times 1 + \frac{a}{2r} + \&c.$, celui lorsque la résistance est comme le carré des vitesses) que la différence de ces tems sera comme $A \times \frac{a}{2r}$, à peu près, c'est-à-dire, comme l'arc décrit; ce qui s'accorde avec ce que le Chevalier Newton a dit dans la proposition 27, livre 2 de ses principes; & par conséquent ce que M. Simpson rapporte dans son Essai, page 74, n'est pas juste; car il dit que cette différence est comme le carré de l'arc.

PROBLEME.

98. Si un pendule qui fait ses oscillations dans une cycloïde, est retardé dans la raison des vitesses, l'on demande le tems d'une oscillation.

Comme nous avons $v \dot{v} = -\frac{vv\dot{x}}{x} = -\frac{v^2}{r}$ dans ce cas, ou $\dot{v} \dot{x} + v \dot{z} = -\frac{\dot{x}^2}{r}$; en divisant par la constante $\dot{x}$, on aura $\frac{v \dot{x} + v \dot{z}}{\dot{x}} = -\frac{\dot{x}^2}{r \dot{x}}$, dont la fluente est $\frac{v \dot{x}}{\dot{x}} =$ fluente $-\frac{\dot{x}^2}{r \dot{x}}$. Or si a exprime l'arc entier décrit, on aura $\frac{\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{a}{\sqrt{ax - x^2}}$, & $\frac{\dot{x}^2}{r \dot{x}} = \frac{a \dot{x}}{r \sqrt{ax - x^2}}$; cette dernière est la fluxion d'un arc de cercle dont le diamètre est l'unité, & son sinus est $\dot{x}$: donc si l'on nomme m cet arc, & c la circonférence entière du même diamètre, la fluente complète sera $\frac{c-m}{r}$, & ainsi $\frac{v \dot{x}}{\dot{x}} = \frac{c-m}{r}$, ou $v = \frac{\dot{x}}{c} \times \frac{c-m}{r}$; & comme on a $\dot{x} v = \dot{z}$, il viendra $\dot{z} = \frac{r \dot{x}^2}{c \pi c - m}$, ou à cause que $\frac{\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{a}{\sqrt{ax - x^2}}$, on aura $\dot{z} = \frac{a \dot{x}}{\sqrt{ax - x^2}} \times \frac{r}{c-m}$; mais $m = \frac{a \dot{x}}{\sqrt{ax - x^2}}$: donc $\dot{z} = \frac{r \dot{x}}{c-m}$, dont la fluente est $z = r \times \log. \frac{c}{c-m}$.

Or lorsque $m = 0$, ce logarithme devient une quantité

constante & indépendante de l'arc décrit. Par conséquent les tems seront égaux dans ce cas, aussi-bien que dans un milieu sans résistance; ce qui confirme la 16^{me} proposition du second Livre des principes du Chevalier Newton.

P R O B L E M E.

99. *L'on demande le tems lorsque la résistance est uniforme, le reste étant de même que ci-dessus.*

Supposant la résistance exprimée par r , on aura $v \dot{y} = \dot{y} - r \dot{z}$, dont la fluente est $v y = z y - 2 r z$; & comme $\frac{ax - x^2}{4} = y$, par la propriété de la cycloïde, en mettrant cette valeur de y dans celle de $v y$, il viendra $v y = \frac{ax - x^2}{4} - 2 r z$, ou en faisant

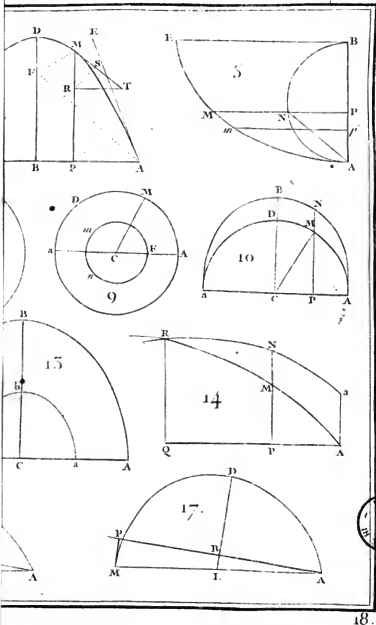
$a - 4r = b$, on aura $v = \sqrt{\frac{bx - x^2}{4}}$; & par conséquent $v t =$

z , donne $t = \frac{4 \sqrt{z}}{\sqrt{bx - x^2}}$; dont la fluente, lorsque $b = z$, est la

circonférence d'un cercle dont le diamètre est l'unité. Par conséquent les tems sont égaux, quoique les arcs décrits soient grands ou petits.

Comme les pendules qui sont bien faits, ne décrivent que des forts petits arcs, & que leur mouvement est sensiblement égal, la résistance qu'ils rencontrent doit être uniforme, & de peu de chose: ainsi il me paroît fort inutile de considérer la résistance lorsqu'on fait des expériences sur la longueur des pendules à secondes, comme quelques Auteurs modernes ont fait. Tout ce qu'on pourroit dire, est que cette longueur sera de quelque chose de plus qu'elle ne devroit être; mais la différence doit être très-peu de chose.

Fin du Traité du Mouvement.





L E T T R E

De M. CLAIRAUT à M. SAVERIEN. (1)

JE vous remercie, Monsieur, de la bonté que vous avez eue de me communiquer les réflexions de M. Muller sur ma théorie de la figure de la Terre. Quoiqu'elles ne me paroissent pas de nature à faire impression sur les lecteurs qui entendent la matière, je profiterai cependant de l'offre que vous m'avez faite de faire imprimer ma réponse à la suite de ses objections, afin que l'air d'assurance avec lequel il les présente, n'en impose pas à ceux qui n'ont pas fait d'étude particulière de la question de la figure de la Terre.

L'article de mon ouvrage que M. Muller attaque, est, comme vous l'avez vu, celui où j'examine la figure que la Terre doit prendre dans l'hypothèse de l'attraction Newtonienne lorsque toutes les parties sont supposées homogènes.

Il est étonné que j'aie regardé comme une vérité difficile à démontrer que cette figure doit être celle de l'ellipse d'Apolonius ; & pour justifier son étonnement, il le démontre ainsi en peu de lignes.

Si l'on considère, comme l'a fait M. Newton, que les parties d'un fluide sont attirées vers un point fixe avec des forces égales à des distances égales de ce point, ce fluide formera une sphère. Supposez cette sphère tourner autour de son axe avec une certaine vitesse comparable à celle produite par la force centripète, les rayons de cercles parallèles à l'équateur s'allongeront proportionnellement à leur longueur : cela étant, voilà l'ellipse démontrée ; & si le Chevalier Newton ne l'a pas démontrée lui-même, c'est qu'il l'a cru si simple & si palpable, que cela doit sauter aux yeux de tout le monde.

(1) Nous croyons entrer dans les vues de M. Muller, dont la candeur & l'habileté nous sont également connues, en insérant ici la réponse de M. Clairaut à quelques objections qu'il y a dans cet Ouvrage contre sa théorie de la figure de la Terre. En pareil cas, M. de Montmort fit imprimer à la fin de son *Analyse des Jeux de Hazards*, les Lettres que M. Bernoulli lui avoit écrites contre cette Analyse ; & il croyoit que la gloire & le succès de son Ouvrage étoient intéressés à cette publication. Ce seroit, sans doute, faire injustice à M. Muller, que de ne lui pas attribuer les mêmes sentiments.

Ce qui me paroît sauter aux yeux de tout le monde , c'est qu'il n'y a pas dans cet argument le moindre germe de la vraie théorie du sujet. Que peut entendre M. Muller par une vitesse comparable à celle produite par la force centripète ? Cette force ne produit de vitesse que lorsque le corps sur lequel elle agit est abandonné à son impulsion. Ici toutes les parties du fluide se tiennent , & n'ont point de chute. D'ailleurs , quel sens donner-il au mot comparable ? Veut-il désigner de l'égalité par ce mot , ou seulement que l'une des vitesses n'est pas infinie par rapport à l'autre ? Mais prétons-nous à l'idée de cet Auteur , & supposons-lui une théorie qui montre que la rotation tend à allonger tous les parallèles proportionnellement à leur longueur , afin de changer le globe en sphéroïde. Qu'il nous dise donc en même tems où il prendra la matière que cet allongement demande. La rotation ne peut certainement pas le produire. Ne voit-on pas que lorsqu'on vient à faire tourner le globe , il faut qu'il se déprime vers les poles , pendant qu'il s'élève à l'équateur ? Et comment donc *la vitesse comparable à celle produite par la force centripète* , diminuera-t-elle quelques-uns des rayons pendant qu'elle allongera les autres ?

Au reste , quel est le Géometre , autre que M. Muller , qui ait cru pouvoir démêler la manière avec laquelle le fluide est parvenu à l'équilibre en tournant ? Huygens , Newton , & tous ceux qui ont traité des figures des Planetes , n'ont jamais cherché qu'à faire voir comment l'équilibre pouvoit subsister avec telle ou telle figure ; mais ils n'ont point entrepris de calculer les oscillations infinies qui ont dû avoir lieu avant que la masse soit parvenue à un état permanent. Il falloit donc , pour que la vérité à démontrer fût aussi palpable que le prétend M. Muller , qu'il trouvât une manière simple de faire voir qu'en chaque point du méridien elliptique , la direction de la pesanteur qui résultoit de l'attraction totale & de la force centrifuge , étoit nécessairement perpendiculaire à la superficie , ou , s'il aimoit mieux , que l'équilibre des colonnes quelconques de fluide avoit lieu dans la forme elliptique. Pour moi , je me console de n'avoir pu trouver qu'avec peine cette démonstration , lorsque Messieurs Maclaurin , Simpson & Stirling n'y sont parvenus que par des méthodes qui sont aussi compliquées que la mienne. La supériorité de M. Muller sera bien établie lorsqu'il aura résolu la question par une voie aussi courte que celle qu'il a employée , mais il faudra que ce soit en effet une solution. En

En attendant qu'il nous en donne une, voyons s'il attaque avec plus de succès le calcul par lequel j'ai déterminé les axes de la Terre. Voici comme il l'a compris.

Il croit qu'après avoir supposé que le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, est celui de 1 à 289, & en avoir conclu pour les axes un rapport de $231\frac{4}{10}$ à $230\frac{4}{10}$ diffèrent de celui qui avoit été trouvé avant moi, j'abandonne en conséquence ma supposition, & que je prends tout simplement & pour ma commodité, le rapport déjà connu de 230 à 231 : que je trouve ensuite par un long circuit l'expression $\frac{1}{289\frac{1}{10}}$ de la force centrifuge qui étoit impliquée dans le rapport de 231 à 230 que j'avois pris gratuitement pour les axes ; ensuite que je ne fais, suivant lui, que supposer la chose en question & y ajouter du verbiage.

Mais si M. Muller étoit entré le moins du monde dans l'esprit du problème, qu'il eût même celui des méthodes d'approximations (si nécessaire pour un Auteur qui enseigne la méthode des fluxions,) il eût vu que ce long circuit, qu'il me reproche d'employer pour déterminer la force centrifuge, n'avoit pas une ligne de trop en partant des élémens qui étoient donnés.

Si j'avois eu par observation la mesure de degré de l'équateur & la longueur du Pendule à secondes au même lieu, la valeur de la force centrifuge qui en auroit résulté m'auroit donné immédiatement le rapport des axes par ma formule : mais au défaut des mesures actuelles de ces quantités, j'étois réduit à les conclure des mesures de même espèce que j'avois, & sur l'exactitude desquelles je devois le plus compter, lesquelles étoient la longueur du Pendule à secondes, déterminée à Paris par M. de Mairan, & le degré mesuré au Nord. A la vérité, l'opération qu'il falloit employer pour passer de ces élémens à ceux dont j'avois besoin, demandoit que l'on connût au moins à peu près le rapport des axes. C'est ce qui fait que j'ai commencé par une première détermination de ce rapport dans laquelle j'ai négligé toutes les petites quantités qui pourroient l'être en pareil cas ; je me suis contenté, par exemple, de faire la force centrifuge égale à $\frac{1}{289}$ de la gravité, ainsi qu'on le trouveroit si l'on négligeoit entièrement la sphéroïdité de la Terre. Substituant alors la fraction $\frac{1}{289}$ à la place de ϕ dans la formule $\lambda = \frac{1}{2} \phi$, j'ai eu pour λ la fraction $\frac{1}{230\frac{4}{10}}$, dans laquelle j'ai négligé les $\frac{4}{10}$, non

comme M. Muller se l'est imaginé, pour me conformer au rapport déterminé par M. Maclaurin; mais parce que les fractions étoient inutiles dans la première détermination. J'aurois pu même, si j'avois voulu, prendre le rapport $\frac{1}{11}$, que Newton avoit trouvé par une approximation moins rigoureuse que la mienne, & arriver également à mon second résultat; mais il étoit bien plus simple de n'emprunter la première valeur du rapport cherché, que de la même méthode qui en pouvoit donner une seconde plus exacte, & même une troisième, quatrième, &c. si l'on vouloit pousser plus loin la rigueur du calcul.

Dès que j'ai eu une valeur de δ , il m'a été facile, au moyen des formules données dans les pages 193 & 194 de mon Ouvrage, de rendre la valeur de ϕ suffisamment exacte, pour que celle de δ qui en résulteroit fût aussi voisine de la vraie qu'il étoit possible d'en approcher dans une seconde opération. Cette valeur de ϕ ainsi corrigée, s'est trouvée $\frac{1}{287.12}$, & comme j'y suis parvenu par les formules essentielles au problème, & non par un cercle vicieux, comme se l'est imaginé M. Muller, le rapport des axes que donne la substitution de cette valeur de ϕ dans l'équation entre ϕ & δ , fournit une valeur de δ qui ne dépend point d'aucune supposition gratuite, & sur l'exactitude de laquelle aucun Géometre ne sauroit avoir de plus grand scrupule que celui d'avoir négligé les troisièmes puissances des très-petites quantités ϕ & δ , scrupule qu'il seroit aisé de lever par une troisième opération, mais que personne ne jugera nécessaire, pas même M. Muller, qui ne s'est pas douté seulement que l'on pût pousser l'exactitude jusqu'aux secondes puissances.

Au reste, ce qui a pu lui faire prendre tellement le change, en examinant ma solution, c'est que le résultat de ma seconde opération ne s'écarte presque point du rout de la fraction $\frac{1}{11}$, que j'avois tiré de la première, mais ce n'est pas ma faute si ce premier résultat s'étoit trouvé si près du but. C'en auroit été une très-réelle que j'aurois commise, si j'avois cru le rapport $\frac{1}{11}$ plus exact que le rapport $\frac{1}{119}$, avant d'avoir employé une approximation plus rigoureuse que celle qu'avoit employé Newton en déterminant ce dernier. Au reste, si M. Muller trouve que j'ai fait trop de frais pour déterminer la proportion des axes, qu'il enseigne un chemin plus court, comme il a voulu faire pour la détermination de la nature du méridien, mais que ce soit un chemin par lequel on arrive.

Quelques considérables que soient les deux méprises de M. Muller dont je viens de parler, il finit ses objections par une troisième erreur qui étonnera davantage ceux qui ont la plus légère teinture de la question.

Pour être fondé à rejeter le rapport de 230 à 231, que Messieurs Maclaurin, Simpson & moi avons prétendu être celui des axes de la Terre dans la supposition de l'homogénéité de ses parties, il emploie un raisonnement dans lequel il confond entièrement ce que la théorie seule fait conclure de suppositions qui n'ont peut-être pas lieu dans la nature, avec ce que l'on tire de mesures actuelles qui sont indépendantes de toute théorie.

Qu'on jette les yeux, dit-il, sur la page 194 de la figure de la Terre, où M. Clairaut trouve le degré du méridien sous l'équateur de 57309 toises, ce qui surpasse ce même degré mesuré par Messieurs Bouguer & de la Condamine, de 556 toises; s'il admet que ses Confrères se soient si fort trompés dans leurs mesures, que doit-on croire des mesures du Nord auxquelles il étoit lui-même employé!

Que M. Muller sçait confondre de choses en peu de mots! Il n'attribue d'abord d'avoir conclu le degré du méridien à l'équateur de 57309. Mais s'il m'avoit seulement lu, il auroit vu que c'est du degré de l'équateur même dont je parle; & pouvois-je parler d'un autre cercle que de celui qui sert à mesurer la force centrifuge? Or les 57309 toises que je suppose au degré de l'équateur; ne s'écartent que de 45 toises des 57309 donnés par M. Bouguer pour ce même degré.

Mais la différence de 556 toises que M. Muller a cru voir si mal à propos, existât-elle, il n'y auroit rien à en conclure contre ma solution. Pourquoi faut-il que le degré de l'équateur que je déduis du degré mesuré au Nord, & de la supposition que la terre est homogène, soit le même que le degré qui résulte de mesures actuelles. Jetterois-je le moindre doute sur l'opération de mes Confrères, ou sur celle à laquelle j'ai eu part, en faisant voir que ces deux opérations ne donnoient pas à la terre l'applatiffement que l'homogénéité des parties demanderoit?

Je ne peux pas croire que M. Muller m'eût attaqué si injustement, & se fût si fort égaré dans toute cette question, s'il l'eût examinée de sens froid. Mais qui peut l'en avoir tiré? Serait-ce le reproche que je semble faire à Newton de n'avoir pas suivi dans ses recherches sur la figure de la Terre, une méthode

Ddd ij

aussi rigoureuse que dans les autres sujets qu'il a traités ? Il n'y avoit rien-là , ce me semble , qui dût blesser M. Muller : & d'ailleurs ceux qui se croiroient le plus intéressés à la gloire de Newton , ne pourroient pas être choqués le moins du monde de la maniere dont je présente mes objections contre le sentiment de ce grand homme.

J'ai l'honneur d'être parfaitement , Monsieur , votre très-humble & très-obéissant serviteur ,

CLAIRAUT.



T A B L E

D E S M A T I E R E S

Contenues dans cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

DES SECTIONS CONIQUES.

SECTION I. *Des Sections Coniques considérées dans le Plan.*

Page 1

THEOR. I. *Dans l'ellipse & l'hyperbole, le carré d'une appliquée quelconque à l'axe est au rectangle fait des parties correspondantes de l'axe, comme le rectangle fait des parties terminées par le foyer est au carré de la moitié de cet axe.*

4

THEOR. II. *La somme dans l'ellipse, ou la différence dans l'hyperbole des lignes tirées des foyers en un point quelconque de la courbe, est toujours égale au premier axe.*

8

Différentes constructions des Sections Coniques lorsque le premier axe & les foyers sont donnés.

Ibid.

PROBL. I. *Tirer une droite qui touche une section conique dans un point donné.*

9

THEOR. III. *Si dans l'ellipse & l'hyperbole l'on tire une appliquée au premier axe par l'intersection d'une droite tirée par le centre parallèle à une tangente quelconque, le carré de la moitié du premier axe moins ou plus le carré de la distance de cette appliquée au centre, sera égal au carré de la distance du centre à l'appliquée qui passe par le point touchant.*

11

THEOR. IV. *Le rectangle, fait des droites tirées des foyers per-*

- pendiculaires à une tangente quelconque , est égal au quarré de la moitié de l'axe conjugué.* 12
- THEOR. V. *Dans une section conique quelconque , le triangle fait par une tangente , soutangente & appliquée correspondante , est égal à un trapeze , terminé par les co-ordonnées , par une tangente qui passe par le sommet de l'axe , & par une droite qui passe par le point touchant & par le centre dans l'ellipse & l'hyperbole , & parallèle à l'axe dans la parabole.* 15
- THEOR. VI. *Dans l'ellipse & l'hyperbole , le quarré d'une appliquée à un diamètre quelconque , est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diamètre , comme le quarré de la moitié de son conjugué est au quarré de la moitié de ce diamètre.* 17
- PROBL. II. *Deux diametres conjugués d'une ellipse ou hyperbole étant donnés , décrire leurs courbes.* 19
- THEOR. VII. *Le parallélogramme fait de deux diametres conjugués quelconques d'une ellipse ou hyperbole , est égal au rectangle fait de deux axes.* 20
- THEOR. VIII. *La somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole des quarrés des demi-diametres conjugués quelconques , est égale à la somme ou différence des demi-axes.* Ibid.
- THEOR. IX. *Le rectangle fait des parties d'une droite terminées dans une ellipse ou hyperbole , & par un diamètre quelconque , est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diamètre , comme le quarré du demi-diamètre , parallèle à cette droite , est au quarré de la moitié de ce premier diamètre.* Ibid.
- THEOR. X. *Les droites , qui passent les extrémités de deux ordonnées à un diamètre quelconque d'une section aussi quelconque , rencontrent ce diamètre au même point.* 22
- THEOR. XI. *Si dans une section conique quelconque on prend deux points dans un diamètre prolongé , & que l'on tire des droites parallèles aux ordonnées de ce diamètre , toute droite qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point d'une droite donnée , passera par un point pris dans une de ces droites ; & toute droite , qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point pris dans une de ces droites , passera toujours dans un point donné.* 24
- THEOR. XII. *Les tangentes tirées de deux points , du même diamètre d'une ellipse ou hyperbole également distans du centre , forment un parallélogramme.* 25

THEOR. XIII. Dans une section conique quelconque, les quarrés des parties d'une droite, terminées par deux tangentes, & par la droite qui joint les points touchans, sont entr'eux comme les rectangles faits des parties de cette droite terminées par la courbe des tangentes. 25

THEOR. XIV. Si deux droites quelconques sont paralleles entr'elles, & terminées dans la parabole, les rectangles faits de parties terminées par deux diametres, seront entr'eux comme les parties de ces diametres entre leurs sommets & ces paralleles. 26

THEOR. XV. Si l'on tire une droite parallele à l'un des axes, je dis que le rectangle fait des parties terminées par les asymptotes & par un point de la courbe, sera égal au quarré de la moitié de l'axe auquel elle est parallele. 28

THEOR. XVI. Si dans l'hyperbole on tire une droite parallele à une des asymptotes, laquelle rencontrant tant la tangente que la courbe & l'ordonnée au diametre, le rectangle fait d'une donnée & d'une constante, sera au rectangle fait des parties de cette ordonnée, dans un rapport donné. 31

THEOR. XVII. Si une droite terminée dans une ellipse ou hyperbole, coupe deux diametres conjugués quelconques, en dedans ou en dehors de la section, le rectangle fait de ses parties terminées par ces diametres & par celui auquel elle est ordonnée, plus ou moins le quarré de la moitié de cette ligne, sera égal au quarré du demi-diametre parallele à cette ligne. 32

PROBL. III. Décrire la circonférence d'un cercle par deux points donnés, en sorte que le segment terminé par une droite donnée de position, soit capable de contenir un angle donné. 33

THEOR. XVIII. Si d'un point quelconque de la courbe d'une section conique, on tire des lignes sur les côtés d'un trapeze inscrit dans la section, paralleles à des lignes données de position, le rectangle fait de celles qui tombent sur les côtés opposés, sera au rectangle fait de celles qui tombent sur les autres côtés opposés, dans un rapport constant. 37

THEOR. XIX. Dans une section conique quelconque, les segments terminés par la courbe & par deux droites, qui joignent les intersections de deux paralleles avec la courbe, seront égaux. 39

THEOR. XX. Les sécateurs d'une ellipse ou hyperbole, terminés par des lignes tirées du centre aux intersections de deux paralleles avec la courbe, seront égaux. 40

THEOR. XXI. *S'il y a deux hyperboles qui ayent le même centre & le même demi-diametre ; & si l'on tire du centre aux extrémités d'une appliquée, deux lignes, les sécateurs terminés par ces lignes, & le demi-diametre de cette appliquée, seront entr'eux comme les conjugués de ce diametre.* 43

THEOR. XXII. *S'il y a deux hyperboles qui ayent le même centre, & dont les deux demi-diametres soient proportionnels à leurs parametres ; & si par les points de rencontre d'un demi-diametre quelconque avec les courbes, on tire deux appliquées sur l'un des diametres que l'on voudra ; les espaces terminés par les courbes, les co-ordonnées & les demi-diametres conjugués, seront entr'eux comme les quarrés des demi-diametres paralleles à ces ordonnées.* Ibid.

THEOR. XXIII. *Si trois tangentes à une ellipse ou hyperbole se rencontrent l'une l'autre, & si d'un des points de rencontre, on tire un diametre, & du sommet une tangente, qui rencontre des lignes données en des points donnés, & si le diametre conjugué rencontre aussi les tangentes en d'autres points donnés, on aura une proportion entre ces lignes.* 45

THEOR. XXIV. *Si deux angles mobiles tournent autour de leurs points angulaires, fixés dans un plan ; je dis que l'intersection des jambes de ces angles décrira une section conique qui passera par des points donnés, pendant que l'intersection des autres jambes décrira une droite donnée de position, laquelle ne passera point par ces points.* 46

THEOR. XXV. *Toutes ces choses étant de même que ci-dessus, je dis que dans l'ellipse & l'hyperbole les parties du diametre, prolongé s'il le faut, terminées par une ligne donnée, expriment le rapport entre cet axe, qui est parallele aux côtés, & son parametre.* 48

THEOR. XXVI. *Les courbes de deux sections coniques quelconques ne peuvent se couper que dans quatre points.* 50

PROBL. IV. *Décrire la courbe d'une section conique par cinq points donnés, de maniere qu'on n'en puisse joindre que deux par une ligne droite.* Ibid.

PROBL. V. *Décrire la courbe d'une section conique par quatre points donnés, & qui touche une droite donnée de position.* 52

PROBL. VI. *Décrire la courbe d'une section conique par trois points donnés, & qui touche deux droites données de position.* Ibid.

PROBL.

DES MATIERES.

401

PROBL. VII. Décrire la courbe d'une section conique par deux points donnés, & qui touche trois droites données de position.

53

PROBL. VIII. Décrire la courbe d'une section conique par un point donné, & qui touche quatre droites données de position. Ibid.

PROBL. IX. Décrire la courbe d'une section conique qui touche cinq droites données de position.

54

PROBL. X. Le foyer & les trois points de la courbe d'une section conique étant donnés, trouver l'axe & l'autre foyer.

56

SECT. II. Des sections coniques considérées dans le solide.

58

THEOR. XXVII. Si deux droites terminées dans une section conique sont parallèles à deux autres droites données de position; je dis que les rectangles faits de leurs parties terminées par la section & leur intersection, sont toujours dans un rapport donné.

60

THEOR. XXVIII. Si l'on coupe un cylindre droit par un plan oblique, la section sera une ellipse.

63

LIVRE SECOND.

Des Fluxions.

SECTION PREMIERE.

PROBL. I. Trouver la fluxion de yy .

69

PROBL. II. Trouver la fluxion de y^1 .

Ibid.

Trouver la fluxion de y^m .

Ibid.

PROBL. III. Trouver la fluxion de yz .

70

Trouver la fluxion de $y^m z^n$.

71

Regles générales pour trouver les fluxions.

73

SECT. II. De la maniere de trouver les plus grands & les moindres.

77

PROBL. GÉNÉRAL. La nature d'une courbe étant donnée, trouver sa plus grande ou moindre appliquée; ou, ce qui est la même chose, une expression étant donnée, trouver ses plus grands & ses moindres.

78

EXEMPLE I. Diviser une ligne de telle maniere que le produit de ses parties soit un plus grand.

79

EXEMPLE II. Diviser une ligne en trois parties, telle que le produit de ses parties soit un plus grand.

Ibid.

EXEMPLE III. De tous les cylindres qu'on peut inscrire dans une sphere, trouver le plus grand.

80

Eee

- EXEMPLE IV. *De tous les cônes qu'on peut inscrire dans une sphere, trouver le plus grand.* 81
- EXEMPLE V. *Entre tous les cônes ou pyramides qui ont la même solidité, trouver celui de la moindre surface convexe.* Ibid.
- PROBL. I. *Etant donné un corps dur p avec sa vitesse v, & celle u d'un corps indéterminé z, qui se rencontrent dans des directions directement opposées, l'on demande la plus grande force de z après le choc.* Ibid.
- PROBL. II. *Dans un triangle donné, trouver un point tel, que la somme des lignes tirées de ce point aux points angulaires, soit un moindre.* 83
- PROBL. III. *Dans un quadrilatere donné, trouver un point tel, que la somme des lignes tirées de ce point aux quatre points angulaires, soit un moindre.* Ibid.
- PROBL. IV. *Trouver la plus grande superficie que deux droites données avec une autre quelconque peuvent contenir.* 84
- PROBL. V. *Trouver la plus grande superficie qui puisse être contenue dans un nombre de lignes quelconques données & une indéterminée.* Ibid.
- PROBL. VI. *L'on demande la plus grande superficie qui puisse être terminée par quatre droites données.* Ibid.
- SECT. III. *De la maniere de trouver les rayons des développées.* 86
- PROBL. GÉNÉRAL. *La nature d'une courbe étant donnée, trouver le rayon de la développée mené par un point donné de la courbe.* 88
- SECT. IV. *De la maniere de trouver les caustiques par réfraction & par réflexion.* 95
- PROBL. GÉNÉRAL. *La nature de la courbe & le point lumineux étant donnés, déterminer la longueur du rayon de réfraction tiré par un point donné.* 96
- PROBL. *Etant donnés une courbe & le point lumineux, trouver la courbe, dont une ligne donnée soit la caustique par réfraction.* 98
- PROBL. *La courbe & le point lumineux étant donnés, trouver une autre courbe, telle qu'elle fasse que les rayons de réfraction passent tous par un point donné dans la tangente qui passe par le point lumineux.* 99

DES MATIERES.
LIVRE TROISIEME.

403

Des Fluentes.

SECTION PREMIERE.

- Regles générales pour trouver les fluentes.* 101
- PROBL. I. Elever un binome $1+z$ à une puissance quelconque m ;
ou , ce qui est la même chose , trouver une suite infinie égale à
 $\frac{1+z^m}{1+z}$. 103
- PROBL. II. L'on demande le logarithme z d'un nombre exprimé
par $1+x$. 106
- PROBL. III. Le logarithme z d'un nombre quelconque x , étant
donné , l'on demande ce nombre. 111
- PROBL. IV. Trouver la valeur d'un arc de cercle , le rayon & la
tangente étant donnés. 115
- PROBL. V. Le rayon & l'arc étant donnés , trouver le sinus de
cet arc. 117
- PROBL. VI. Le rayon & l'arc étant donnés , trouver le sinus versé. 118
- PROBL. VII. Trouver la fluxion de $\delta z^{n-1} \times e + f z^n$. 120
- Explication des Tables contenant les formules générales des fluxions.* 124
- Table des formules générales des fluxions & fluentes.* 128
- PROBL. VIII. Changer quelques expressions fluxionnaires , dont
les fluentes dépendent de la quadrature des sections coniques , en
d'autres plus simples. 133
- Tables des expressions logarithmiques.* 135
- SECT. II. De la maniere de trouver les valeurs des superficies ,
surfaces & solides , avec la redification des courbes. 136
- PROBL. GÉNÉRAL. Trouver les fluxions des superficies , surfaces
& solides. Ibid.
- PROBL. L'on demande la fluxion d'un arc quelconque , lorsque les
appliquées sont perpendiculaires à leur axe. 139
- EXEMPLE I. L'on demande les valeurs d'un espace donné , & du
solide décrit par cet espace autour de l'axe , $x=y^m$ étant l'équa-
tion de la courbe. Ibid.
- EXEMPLE II. L'on demande la valeur d'un arc donné , en suppo-
sant que les appliquées sont perpendiculaires à l'axe , & que $x=$
 y^m soit l'équation de la courbe. 141

Ecc ij

- EXEMPLE III. *L'on demande la valeur de la surface décrite par un arc autour d'un axe donné.* 143
- EXEMPLE IV. *L'on demande la valeur du solide décrit par un segment elliptique, ou hyperbolique, autour d'un premier diamètre.* Ibid.
- EXEMPLE V. *L'on demande la valeur du sécateur elliptique, ou hyperbolique, exprimé en partie de la tangente.* 144
- EXEMPLE VI. *L'on demande la valeur du sécateur exprimé en partie de l'appliquée.* 146
- EXEMPLE VII. *Soit la cissoïde ordinaire dont la propriété est que toute perpendiculaire sur l'axe est toujours une troisième proportionnelle à l'appliquée de son cercle générateur, & de l'abscisse correspondante, l'on demande la valeur de l'espace.* 147
- EXEMPLE IX. *L'on demande la valeur du solide décrit par l'espace autour de l'asymptote.* 148
- EXEMPLE X. *L'on demande la valeur de l'espace de la logarithmique infiniment prolongée.* 149
- EXEMPLE XI. *L'on demande la longueur de l'arc de la spirale d'Archimede.* Ibid.
- EXEMPLE XII. *Soit le cylindre droit, coupé par un plan obliquement à sa base, & passant par le centre du cercle, l'on demande la valeur de l'onglet.* 150
- EXEMPLE XIII. *L'on demande la valeur de la surface convexe de l'onglet.* Ibid.
- EXEMPLE XIV. *L'on demande la valeur de l'arc elliptique, terminé par le second axe, & par une appliquée quelconque au premier.* 151
- EXEMPLE XV. *L'on demande la valeur de l'arc hyperbolique.* 152
- EXEMPLE XVI. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc elliptique autour de l'axe.* 153
- EXEMPLE XVII. *L'on demande la valeur de la surface décrite par la demi-ellipse autour de la tangente.* Ibid.
- EXEMPLE XVIII. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc hyperbolique autour de l'un des axes.* 154
- SECT. III. *Des centres de gravité.* 155
- THEOR. I. *Si plusieurs corps sont attachés à une ligne inflexible & sans pesanteur, & que cette ligne soit soutenue ou suspendue par un point, tel que la somme des produits, des masses, chacune multipliée par la distance de son point de suspension,*

d'un côté soit égale à la somme des produits pareils de l'autre, ces corps seront en équilibre. 156

THEOR. II. *Si plusieurs corps sont fixés ensemble dans différens plans, la somme de tous les produits de chaque corps, multipliée par sa distance respectiue à un plan donné de position, sera égale à la somme de tous ces corps, multipliée par la distance de leur centre commun de gravité à ce plan, s'ils sont tous placés du même côté, ou la différence de ces produits de ceux placés d'un côté à ceux de l'autre.* Ibid.

Règle générale pour trouver la distance du centre de gravité d'un corps à un plan donné de position. 157

EXEMPLE I. *Trouver la distance du centre de gravité d'un triangle à une ligne-parallèle à sa base.* Ibid.

EXEMPLE II. *L'on demande la distance du centre de gravité de la demi-parabole à la tangente, & dont l'équation est $x=y^m$.* 158

EXEMPLE III. *L'on demande la distance du centre de gravité du solide, décrit par un espace autour d'une ligne donnée, au sommet.* 159

EXEMPLE IV. *L'on demande la distance du centre de gravité d'un arc de cercle à la ligne, qui passe par le centre, & qui est parallèle à la corde.* 160

EXEMPLE V. *L'on demande la distance du centre de gravité du secteur au centre.* Ibid.

EXEMPLE VI. *L'on demande la distance du centre de gravité d'un espace elliptique ou hyperbolique au premier axe.* 161

EXEMPLE VII. *L'on demande la distance du centre de gravité du solide, décrit par l'espace autour du second axe, au premier axe.* Ibid.

EXEMPLE VIII. *L'on demande la distance du centre de gravité de la surface, décrite par l'arc elliptique autour de l'un des axes, à l'autre axe.* 162

EXEMPLE IX. *L'on demande la distance du centre de gravité de la surface, décrite par l'arc hyperbolique autour de l'un des axes.* Ibid.

EXEMPLE X. *L'on demande la distance du centre de gravité de la partie de l'onglet, à la tangente de la base.* 163.

SECT. IV. *Des centres d'oscillation & de percussion.* 164

PROBL. GÉNÉRAL. *Trouver la distance du centre d'oscillation d'un pendule composé au point de suspension, en supposant que les particules soient placées dans le plan dans lequel se font les*

<i>oscillations.</i>	165
<i>Règle générale pour trouver la distance du centre d'oscillation d'un pendule à l'axe de balancement.</i>	166
EXEMPLE I. <i>Trouver la distance du cercle d'oscillation d'un triangle qui balance autour de l'axe, qui passe par le sommet parallèlement à la base.</i>	Ibid.
EXEMPLE II. <i>Trouver la distance du centre d'oscillation de la parabole, qui balance autour de la tangente, parallèle à la base au point de suspension.</i>	167
EXEMPLE III. <i>On suppose que la parabole balance autour de la base.</i>	Ibid.
EXEMPLE IV. <i>Soit un cercle qui balance autour de l'axe perpendiculaire au diamètre dans le plan du cercle.</i>	Ibid.
EXEMPLE V. <i>Soit une surface sphérique qui balance autour de la ligne.</i>	168
EXEMPLE VI. <i>Soit une sphere qui balance autour de la ligne.</i>	169
EXEMPLE VII. <i>Soit un cylindre droit qui balance autour de la ligne perpendiculaire à son axe.</i>	170
EXEMPLE VIII. <i>Soit un cône droit qui balance autour de la ligne perpendiculaire à son axe.</i>	Ibid.
EXEMPLE IX. <i>Soit une pyramide droite qui balance autour de la ligne perpendiculaire à son axe dans le plan d'un de ses côtés.</i>	171
EXEMPLE X. <i>On suppose que l'axe de balancement est parallèle à la diagonale.</i>	Ibid.
PROBL. GÉNÉRAL. <i>Trouver le centre de percussion de deux corps considérés comme des points placés dans le plan de la figure.</i>	172
SECT. V. <i>Des problèmes Physico-Mathématiques.</i>	173
PROBL. I. <i>L'intrados d'une voûte étant donné, trouver l'extrados, ensorte que tous les voussoirs soient en équilibre entr'eux.</i>	Ibid.
I. CAS. <i>Des voûtes décrites par un mouvement parallèle.</i>	174
II. CAS. <i>Des voûtes décrites par un mouvement circulaire.</i>	175
<i>Construction de quelques voûtes formées par un mouvement parallèle.</i>	177
PROBL. II. <i>Soit une pièce de bois placée horizontalement, & soutenue par deux autres pièces, qui font un angle donné avec la première; l'on demande la position de l'arcboutant d'une longueur donnée, telle que la pièce soit le mieux soutenue qu'il</i>	

soit possible.

178

PROBL. III. Soit une piece de bois d'une longueur quelconque, fixée en un point, en sorte que l'angle donné soit constant, l'on demande la position d'un arcbutant d'une longueur donnée, de maniere que la piece soit le mieux supportée qu'il soit possible.

180

PROBL. IV. Soit un plan incliné sur lequel glisse une boîte cubique, ouverte par le haut, & mue uniformément par une puissance dans une direction parallele au plan, l'on demande l'angle d'inclinaison de ce plan sur l'horizontale, tel que la puissance tire le plus d'eau hors d'un réservoir, dans un tems donné qu'il soit possible.

181

PROBL. V. Soit la section d'une riviere dans laquelle on peut bâtir une écluse; l'on demande l'angle que les portes doivent faire, afin qu'elles résistent contre la pression de l'eau le mieux qu'il soit possible.

182

PROBL. VI. Etant donnée la vitesse d'un fluide parfait qui fait mouvoir une machine, l'on demande le plus grand effet possible que cette machine puisse produire dans un tems donné.

184

PROBL. VII. L'angle que les ailes rectangulaire & plane d'un moulin à vent font avec l'arbre étant constant, l'on demande la position de l'arbre à l'égard de la direction du vent qu'on suppose souffler uniformément, en sorte que les ailes tournent avec la plus grande vitesse possible.

186

PROBL. VIII. La direction du vent étant supposée parallele à l'arbre, l'on demande l'angle que les ailes doivent faire avec l'axe, pour qu'elles tournent avec la plus grande vitesse possible.

187

PROBL. IX. Soit la poupe d'un vaisseau qui va dans une direction donnée; l'on demande l'angle que le gouvernail doit faire avec la poupe, en sorte que le vaisseau tourne avec la plus grande vitesse possible.

188

PROBL. X. Trouver la fluxion de la résistance des figures qui se meuvent uniformément dans un fluide parfait.

Ibid.

PROBL. XI. Entre tous les cônes tronqués, décrits par un trapèze autour de sa base, qui ont la même base & la même hauteur, & qui se meuvent dans la direction de l'axe, trouver celui de moindre résistance.

190

PROBL. XII. L'on demande le solide de moindre résistance décrit par un arc de cercle, & par les tangentes autour de la ligne de direction.

191

- PROBL. XIII. *Entre tous les solides décrits par l'espace terminé par des droites données, & par une autre ligne quelconque, autour de la ligne de direction, l'on demande celui de moindre résistance.* 192
- PROBL. XIV. *Trouver les points le plus haut & le plus bas de l'hélice de la vis d'Archimede, l'angle fait par la section d'un plan horizontal, & par le demi-cylindre sur lequel l'hélice est formée, étant donné.* 193
- PROBL. XV. *Soit l'extension d'un ressort parfait toujours comme la longueur pliée, l'on demande une courbe telle que la surface qu'elle décrit autour de l'axe, soit telle qu'une chaîne parfaitement flexible & sans pesanteur étant roulée dessus, soutienne partout le ressort également.* 195
- PROBL. XVI. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible, fixée par les bouts dans un plan vertical, fera étant pressée en chaque point par des puissances quelconques dont la loi est donnée.* Ibid.
- EXEMPLE I. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant pressée par l'atmosphère de l'air.* 197
- EXEMPLE II. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant remplie par un fluide homogène.* Ibid.
- EXEMPLE III. *Trouver la nature de la courbe qu'une chaîne parfaitement flexible fera étant suspendue par ses bouts dans un plan vertical.* Ibid.
- EXEMPLE IV. *Trouver la nature de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant pressée par le vent qui souffle uniformément dans une direction perpendiculaire.* 198
- EXEMPLE I. *Trouver le rapport entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires, en sorte que la figure soit un demi-cercle.* 199
- EXEMPLE II. *Trouver le rapport entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires, en sorte que la figure soit une parabole.* Ibid.
- PROBL. XVII. *Soit une ligne d'une pesanteur donnée, qui tourne autour d'un centre, & qui est attachée par l'autre bout à un fil; qui passe par-dessus une poulie, & soutient un poids cylindrique par le moyen d'une courbe dont on demande la nature telle que le poids soit toujours en équilibre avec une ligne donnée, en quelque position qu'elle puisse être.* 200
- PROBL. XVIII. *Soit une masse de terre uniforme dans toutes ses parties,*

paries ; l'on demande la ligne de rupture , que le prisme fera par son propre poids , n'étant point soutenu , en supposant que la résistance causée par le poids & la tenacité des particules , soit au produit de la masse dans un rapport donné. 201

PROBL. XIX. Trouver la moindre racine d'une équation quelconque rationnelle , & qui ne contient qu'une quantité variable. 202

PROBL. XX. Trouver la plus grande racine d'une équation quelconque rationnelle , & qui ne renferme qu'une seule inconnue. 205

De la méthode des différences. 206

PROBL. XXI. Trouver la somme d'une suite de nombres quelconques a, b, c, d, e , dont il y a quelque rang de différences constantes. Ibid.

PROBL. XXII. La somme telle que $\frac{A}{x \cdot x + n \cdot x + 1 \cdot n \dots x + x \cdot n}$ d'une suite infinie étant donnée , l'on demande le terme général de cette suite. 208

EXEMPLE I. Soit $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \text{\&c.}$ continuée à l'infini , la suite proposée. 209

EXEMPLE II. Soit proposée la suite $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{\&c.}$ continuée à l'infini. 210

PROBL. XXIII. Trouver la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{x \cdot x + m}$, & dont n est la différence commune des facteurs. 211

EXEMPLE I. Soit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{\&c.}$ continuée à l'infini , la suite proposée. 212

EXEMPLE II. Soit $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{\&c.}$ la suite proposée , laquelle exprime le logarithme hyperbolique de 2. 213

PROBL. XXIV. L'on demande la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{x \cdot x + n \cdot x + m}$, & dont la différence commune des facteurs est n . 215

PROBL. XXV. L'on demande la somme de la suite dont le terme général est $\frac{1}{x}$, & la différence commune des facteurs n . 216

PROBL. XXVI. La somme S d'une suite étant exprimée par $x^{t+m} \times \text{par } \frac{a}{x} + \frac{b}{x \cdot x + n} + \frac{c}{x \cdot x + 1 \cdot n} + \frac{d}{x \cdot x + 2 \cdot n} + \text{\&c.}$ l'on de-
Fff

mande la valeur du terme général T de cette suite. 218

EXEMPLE I. Soit $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \text{\&c.}$ la suite proposée. 219

EXEMPLE II. Soit $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \text{\&c.}$ la suite proposée. 220

Logarithmes hyperboliques. 226

PROBLEME XXVII. Soit $S = T \times \text{par } a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z.z+n} +$

$\frac{d}{z.z+n.z+z^2} + \text{\&c.}$ la somme d'une suite dont T est le terme général; l'on demande la relation entre deux termes successifs T, T' , de cette suite. 230

Application de la méthode des Différences à la Quadrature des courbes. 233

PROBL. XXVIII. Etant données plusieurs ordonnées $a, b, c, d, e, \text{\&c.}$ d'une courbe, l'on demande de trouver l'espace compris entre la première & la dernière de ces ordonnées. Ibid.

PROBL. XXIX. Si l'on suppose qu'un corps soit fixé à une ligne inflexible sans pesanteur, l'on demande la distance du centre d'oscillation d'un autre corps fixé à la même ligne, au point de suspension, en sorte que cette ligne tourne avec la plus grande vitesse possible. 236

PROBL. XXX. La distance du centre d'oscillation d'une sphere au point de suspension étant donnée, aussi-bien que le diamètre de la sphere, trouver la distance de la sphere au point de suspension. Ibid.

PROBL. XXXI. Soient le centre commun d'oscillation de deux corps & celui du corps donnés; trouver la distance du corps au point de suspension. 237

SECT. VI. Des roulettes ou cycloïdes. Ibid.

SECT. I. Trouver la longueur du rayon de la développée, mené par un point donné. 239

PROBL. II. La même chose étant supposée, trouver la nature de la développée de la roulette. 240

PROBL. III. Soit la roulette ordinaire, sa base posée horizontalement, & son sommet vers le bas, l'on demande le tems de la description d'un arc quelconque, par un corps pressé par la seule gravité dans un milieu sans résistance. 241

PROBL. IV. Lorsque le point décrivant n'est point dans la circonférence du cercle générateur, trouver la longueur du rayon de la développée, mené par un point donné. 242

DES MATIÈRES.

PROBL. V. Trouver la valeur de l'espace.	244
PROBL. VI. Trouver la valeur de la surface décrite par la roulette ordinaire, autour de la tangente.	245
PROBL. VII. Trouver la valeur de la surface décrite par l'arc autour de l'axe.	246
PROBL. VIII. Trouver la valeur du solide décrit par la partie extérieure de la roulette autour de la tangente.	247
PROBL. IX. Trouver la valeur du solide décrit par l'espace autour de l'axe.	248
Construction de la cycloïde ordinaire.	249

TRAITÉ DES QUADRATURES.

INTRODUCTION.	250
PROBL. I. Trouver le rapport entre les cosinus x, u , de deux arcs quelconques a, na , qui sont entr'eux comme l'unité est à n .	252
PROBL. II. Supposant la méthode de trouver les diviseurs d'une équation, il s'agit de réduire une fraction quelconque en autant de fractions simples que le dénominateur a des diviseurs inégaux.	259
Règle générale pour trouver les numérateurs des fractions simples.	260
PROBL. III. Réduire la fraction $\frac{x^{\theta-1}}{x^{\theta}-1}$ dans des fractions simples, en supposant θ un nombre entier positif quelconque & moindre que n .	263
PROBL. IV. Réduire la fraction $\frac{x^{\theta-1}}{x^{\theta}+1}$ en des fractions simples, θ étant un nombre entier & positif quelconque moindre que n .	264
PROBL. V. Réduire la fraction $\frac{x^{\theta-1}}{x^{12} \pm 12x^{\theta} x^{\theta-1} \pm x^{12}}$ en des fractions simples, lorsque le dénominateur ne peut être réduit en deux binômes, & que θ est moindre que n .	265
PROBL. VI. Réduire la fraction $\frac{x^{\theta-1}}{x^{12} \pm 12x^{\theta} x^{\theta-1} \pm x^{12}}$, en des fractions simples, lorsque θ est plus grand que n , & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binômes.	268

PROBL. VII. Trouver la fluente de $\frac{r y z - x z z}{r + x z + z z}$. 271

PROBL. VIII. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1}}{e + f z^n}$, lorsque θ est un nombre entier quelconque. 272

PROBL. IX. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1} z^{n-1}}{e + f z^n}$, lorsque θ , δ , λ , sont des nombres entiers quelconques positifs, & que δ est moindre que λ . 275

PROBL. X. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1} z^{n-1}}{e + f z^n + g z^{2n}}$, lorsque θ est un nombre entier quelconque, & que le dénominateur peut être réduit en deux binomes. 274

PROBL. XI. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1} z^{n-1}}{z^{2n} + 2 n z^n r^{n-1} + r^{2n}}$, lorsque θ , n sont des nombres entiers quelconques, & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes. 276

PROBL. XII. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1} z^{n-1}}{z^{2n} + 2 n z^n r^{n-1} + r^{2n}}$, lorsque n , δ , λ , sont des nombres entiers quelconques, & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes. 278

PROBL. XIII. Trouver la fluente de $\frac{d z z^{p-1} z^{n-1}}{e + f z^n + z^{2n}}$, lorsque δ est moindre que λ , & que le dénominateur peut être réduit en deux binomes. Ibid.

PROBL. XIV. Trouver la fluente de $d z z^m \times \frac{1}{e + f z^n}$, lorsqu'elle peut être trouvée exactement, ou qu'elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques. 280

PROBL. XV. Trouver la fluente de $d z z^m \times \frac{1}{e + f z^n}$, lorsque π est un nombre positif plus grand que l'unité. 282

PROBL. XVI. Trouver la fluente de $d z z^m \times \frac{1}{e + f z^n}$, lorsque π est plus grand que l'unité. 284

PROBL. XVII. Trouver la fluente de $d z z^{\pm p-1} \times \frac{1}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, lorsque θ , δ , λ , sont des nombres entiers quelconques. 287

PROBL. XVIII. Trouver la fluente de $d z z^{\pm p-1} \times \frac{1}{a^n + z^{n \pm \lambda}}$, lorsque θ , λ , δ , sont des nombres entiers quelconques. 289

DES MATIERES.

- PROBL. XIX. Soit $P = e + f z^n + g z^{2n}$, l'on demande la fluente de $d z z^{n-1} P^n$, lorsqu'elle peut se réduire à la quadrature des sections coniques. 413
- PROBL. XX. Soit $P = e + f z^n$, $Q = g + h z^n$, l'on demande la fluente de $d z z^{n-1} P^n Q^n$, lorsqu'elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques. 290
- PROBL. XXI. L'on demande la fluente de $\frac{d z z^{n-1}}{h + l z^n + e + f z^n + g z^{2n}}$. 295
- Formules générales contenues dans ce Traité. 309
- 313

TRAITÉ DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

INTRODUCTION.

PREMIERE PARTIE. Du mouvement dans un milieu sans résistance. 314

THEOR. La fluxion de la vitesse d'un corps mise en mouvement par une force quelconque, qui varie selon quelque loi, est à la fin d'un temps donné, comme le rectangle fait par cette force à la fin de ce temps, & la fluxion du temps écoulé. Ibid.

THEOR. La fluxion de l'espace parcouru par un corps avec une vitesse quelconque qui varie selon quelque loi donnée, est comme le rectangle fait par cette vitesse à la fin d'un temps, & la fluxion du temps écoulé. Ibid.

COR. La vitesse étant constante, comme dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus avec la même vitesse, sont comme les temps écoulés; si les vitesses sont inégales, les espaces parcourus en même temps sont comme ces vitesses; & enfin quand les temps sont inégaux aussi-bien que les vitesses, les espaces parcourus sont dans la raison composée des temps & des vitesses. 323

COR. Si la force motrice est constante comme la gravité proche la surface de notre terre; les espaces parcourus sont comme les quarrés des vitesses ou des temps, ou dans la raison composée des temps & des vitesses. Ibid.

COR. L'espace parcouru uniformément avec une vitesse acquise en

tombant du point de repos d'une certaine hauteur, est double de cette hauteur décrite en même temps. 324

COR. La gravité des corps dans différentes latitudes de la terre, est comme le double de la hauteur de la chute dans une seconde dans cette latitude, en commençant son mouvement du point de repos. Ibid.

REGLES GÉNÉRALES. I. Pour trouver la distance qu'un corps peut parcourir uniformément dans une seconde de temps avec une vitesse donnée. 325

II. Pour avoir le temps de la chute d'un corps exprimé en secondes. Ibid.

Problème général pour les forces centripètes. 326

Si un corps jeté dans une direction donnée avec une vitesse donnée, est attiré vers un point fixe par une force quelconque exprimée par les distances de ce point & des constantes, l'on demande la nature de la courbe décrite par ce corps. Ibid.

COR. Les vitesses sont partout réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires tirées du point fixe aux tangentes qui passent par le centre du corps, quelle que puisse être la force centripète. 327

COR. Les temps sont toujours comme les aires décrits par le rayon tiré du point fixe au centre du corps, quelle que puisse être la force centripète. 328

COR. Des équations qui expriment les temps & les vitesses, lorsque les directions de la force motrice sont parallèles. Ibid.

PROBL. Si un corps jeté d'un point donné dans une direction donnée avec une vitesse aussi donnée, est poussé ou attiré par une force quelconque, dont les directions sont parallèles, l'on demande la nature de la courbe décrite par ce corps. Ibid.

COR. D'où l'on déduit les mêmes équations que ci-devant pour les mêmes cas. 329 & 330

EXEMP. Lorsque la force est constante, & que ses dimensions sont parallèles, la courbe décrite par le corps est la parabole ordinaire. 330

COR. D'où l'on tire les règles ordinaires de l'art de jeter les bombes. 331

EXEMP. Application des règles précédentes aux corps qui décrivent la cycloïde ordinaire; & démonstration que les temps employés à parcourir un arc quelconque, en commençant du point de repos, & qui sont terminés par le point le plus bas de la cycloïde,

sont toujours égaux.

332

COR. Où l'on fait voir que si la longueur d'un pendule à secondes est donnée dans une latitude quelconque, la hauteur d'où un corps tombera dans une seconde dans la même latitude, sera aussi donnée.

Ibid.

EXEMP. Où l'on fait voir, en comparant plusieurs expériences faites sur la longueur des pendules en France & en Angleterre, que la gravité dans la latitude de $51^{\circ}, 32'$, est à la gravité dans la latitude de $48^{\circ}, 51'$, comme 100000 est à 100124.

Ibid.

EXEMP. Où l'on fait voir que la force centripète qui tend vers le foyer d'une parabole est réciproquement comme les quarrés des distances du corps au foyer.

333

EXEMP. La force centripète qui tend vers un des foyers d'une ellipse est réciproquement comme le quarré des distances du corps à ce foyer. La même chose arrive dans l'hyperbole, pourvu que la force centripète soit changée en centrifuge.

334

EXEMP. La force centripète qui tend vers le centre d'une ellipse est comme la distance du corps à ce centre.

Ibid.

PROBL. La force centripète étant partout comme les quarrés des distances du corps au point fixe, l'on demande la nature de la courbe décrite par le corps, & l'on prouve qu'elle ne peut être qu'une ellipse.

336

COR. L'on trouve une expression générale pour les temps périodiques des planetes qui tournent autour du soleil.

Ibid.

COR. Les temps périodiques dans les ellipses qui ont le même premier axe, sont égaux, depuis la plus plate jusqu'au cercle, quel que puisse être le second axe. Et les quarrés des temps périodiques des corps qui tournent autour du même centre, sont comme les cubes de leurs distances moyennes.

337

COR. Si les temps périodiques sont égaux, les forces centrifuges sont comme les rayons des cercles. Si les temps sont différens dans des cercles égaux, les forces centrifuges sont comme les quarrés des temps périodiques inverses, & dans des cercles différens, comme leurs rayons directs & les quarrés des temps périodiques inverses. Enfin les vitesses sont comme les rayons en raison directe, & les temps périodiques en raison inverse.

Ibid.

COR. La vitesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la moitié du premier axe d'une ellipse, est à la vitesse du corps qui tourne dans l'ellipse autour du même point fixe, comme la perpendiculaire tirée du point fixe à la tangente

est à la moitié du second axe. Et la vitesse d'un corps qui tourne dans la parabole, est égale à la vitesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la moitié de cette distance.

REMARQUE. L'on trouve la distance moyenne de la terre au soleil exprimée par les rayons de la terre, en supposant que la parallaxe horizontale du soleil est de $10''$, selon les dernières & meilleures observations; & on fait voir que si cette parallaxe étoit de 10° seulement, cette distance seroit de 3044 rayons de la terre plus grande que la première; ce qui fait voir l'importance d'avoir cette parallaxe le plus exactement qu'il est possible.

Table des temps périodiques des planetes qui tournent autour du soleil, d'où, par le moyen des regles précédentes, on trouve les distances moyennes de ces planetes au soleil.

Par le moyen des diametres apparens des planetes, on trouve leurs diametres véritables exprimés par le rayon de la terre.

En supposant les planetes des solides semblables, on trouve le rapport entre leurs solidités, & on voit que le soleil est presque un million de fois plus grand que la terre.

Par le moyen des temps périodiques des satellites, l'on trouve le rapport entre les gravités absolues des planetes, celles avec lesquelles les corps placés sur leurs surfaces sont attirés vers leur centre, enfin le rapport de leurs densités; & on remarque qu'on n'a pas encore trouvé le moyen d'avoir la gravité ni la densité des planetes qui n'ont point de satellites.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

THEOR. Soit un amas de matiere uniforme, dont les parties sont détachées les unes des autres, & qui sont attirées vers un point fixe avec des forces égales à des distances égales, cet amas formera une sphere.

COR. Si la force attractive venoit à cesser à une certaine distance du centre, la sphere auroit dans ce cas un noyau vuide autour du centre, & ce noyau seroit aussi sphérique.

THEOR. Si l'on supposoit que cette sphere vint à tourner autour d'une axe, avec une certaine vitesse qui soit comparable avec celle produite par l'attraction, elle seroit changée en un sphéroïde applati vers les poles.

COR. Il pourroit arriver que la force centrifuge devienne si grande que le sphéroïde deviendrait tout plat vers ses poles. Et quoique

DES MATIERES.

417

que les parties de la matiere qui forme les corps célestes soient de différentes densités, ces corps sont toujours des sphéroïdes.

344

THEOR. L'attraction d'un corps vers le centre d'un pendule placé à la surface, est comme la distance du centre. Ibid.

THEOR. Dans les planetes, la direction de la gravité est partout perpendiculaire à la tangente, en chaque point de la surface. 345

PROBL. Le rapport entre les forces de gravité dans deux latitudes quelconques d'une planete étant donné, trouver le rapport entre le diamètre de l'équateur & l'axe qui passe par les poles. 346

COR. D'où il suit, 1°. que la gravité au pole est à la gravité sous l'équateur, comme le rayon est au demi-axe; 2°. que la force centrifuge à un point déterminé, est à la force centrifuge sous l'équateur, comme le rayon du cercle décrit par ce point dans la révolution de la figure autour de l'axe, est au rayon de l'équateur. 347

COR. Expression fort simple du rapport des axes de l'ellipse, celui de la gravité sous l'équateur & dans une latitude quelconque étant donné. 348

EXEMP. Parallele de cette expression avec celle que plusieurs Auteurs ont donnée. 349

PROB. Trouver le rapport entre les axes d'une planete, le rapport entre les diamètres de l'équateur de la terre, celui de cette planete, & les temps de révolution, étant donnés. 356

EXEMP. Expression du rapport du diamètre de Jupiter à celui de la Terre. Ibid.

DES NOYAUX OU VUIDES DANS LES PLANETES.

RÉFLEXIONS PRÉLIMINAIRES. 357

PROB. Trouver la figure du noyau vuide dans une sphere qui ne tourne pas autour de son axe. 358

COR. Si la sphere vient à tourner autour de son axe, de maniere qu'elle s'allonge en sphéroïde, le noyau vuide s'allongera aussi en même proportion. Ibid.

PROB. Trouver le rapport entre le rayon du noyau vuide dans une sphere au rayon de la sphere. 359

COR. D'où l'on déduit la maniere de déterminer le rayon du noyau. 360

G g g

TRAITÉ DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

SECONDE PARTIE.

REFLEXIONS PRÉLIMINAIRES.

THEOR. La fluxion de la vitesse v , acquise par une force quelconque P dans le tems t , dans un milieu dont la résistance est exprimée par R , est comme le rectangle $P - R \times t$. 361

THEOR. La fluxion de l'espace s parcouru avec une vitesse u , acquise dans le tems t , est comme $u t$. 362

THEOR. La résistance du milieu ne se fait que dans la direction du corps. Ibid.

THEOR. La résistance du milieu est dans la raison composée du carré de la vitesse, de la densité & de la ténacité. Ibid.

THEOR. Dans le même milieu, la résistance que les corps de différentes grosseurs souffrent, sont dans la raison directe de leur surface & de leur poids inverse. 363

COR. De-là il suit que les corps semblables rencontrent des résistances qui sont comme leurs diamètres inverses, & que ces résistances diminuent dans la même raison que leurs diamètres augmentent. Ibid.

COR. Il suit encore que les corps semblables de différentes gravités spécifiques, sont dans la raison directe des carrés de leurs diamètres, & dans la raison inverse de leur poids. Ibid.

THEOR. Dans un milieu dont les parties sont placées à des distances égales, & qui n'ont point de ténacité, ni d'élasticité, une sphere avec une vitesse uniforme, perd tout son mouvement. 364

COR. De-là il suit qu'un corps qui tombe de la moitié d'une hauteur déterminée, dans un milieu sans résistance, acquiert la plus grande vitesse qu'il puisse avoir dans ce milieu. Ibid.

PROBL. Déterminer la hauteur à laquelle un corps peut monter, & le tems employé à parcourir cette hauteur. 365

EXEMP. I. Solution générale de ce Problème par le calcul des fluxions. Ibid.

EXEMP. II. Solution particulière de ce Problème. 366

EXEMP. III. Autre solution sous une condition donnée. 367

DES MATIERES.

EXEMP. IV. Formule générale pour cette solution.	419
EXEMP. V. Autre formule.	368
PROBL. Un corps étant jeté dans une direction donnée, déterminer l'équation qui exprime la relation entre les abscisses & les ordonnées correspondantes.	Ibid.
EXEMP. Déterminer la nature de la courbe décrite par un corps, la résistance du milieu étant supposée comme le quarré des vitesses.	369
PROBL. Un boulet de canon de cinq pouces de diametre, étant chassé sous un angle de 45 degrés, avec une vitesse acquise en tombant, déterminer l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée.	370
PROBL. Déterminer la plus grande appliquée.	373
PROBL. Déterminer la portée.	374
PROBL. Déterminer la vitesse au sommet.	Ibid.
PROBL. Déterminer le tems employé à parcourir l'arc.	Ibid.
PROBL. Déterminer la vitesse à la fin de la chute.	375
COR. De-là il suit que la valeur trouvée exprime la tangente de l'angle fait par la courbe & la portée.	Ibid.
	376

Seconde maniere de résoudre les mêmes Problèmes
par la méthode des différences.

PROBL. Déterminer les valeurs des abscisses & des ordonnées.	377
EXEMP. Un boulet de canon de 18 livres étant chassé sous un angle de 45 degrés, déterminer l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée.	378
EXEMP. On demande la valeur de la plus grande appliquée.	379
EXEMP. On demande la portée.	380

Troisième maniere de résoudre les mêmes Problèmes.

REFLEXIONS PRÉLIMINAIRES.	381
EXEMP. La vitesse étant connue, déterminer l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée.	382
EXEMP. On demande la plus grande hauteur à laquelle le corps monte.	Ibid.
EXEMP. On demande la partie BK de la portée.	383
PROBL. Déterminer le sinus de l'angle d'élévation, la portée & la vitesse projectile étant données.	Ibid.
EXEMP. On demande le sinus double de l'angle de l'élévation.	384
Remarque sur les solutions précédentes.	Ibid.

PROBL. Un corps ayant commencé son mouvement à un point, & étant pressé par la force de la gravité, déterminer la vitesse dans un point quelconque d'une courbe donnée, & le tems que le corps emploie à parcourir l'arc.	385
EXEMP. Solution de ce Problème dans une cycloïde.	386
PROBL. Déterminer la différence entre les arcs décrits dans la descente & dans la montée de la cycloïde.	Ibid.
PROBL. Déterminer le tems d'une oscillation complète dans une cycloïde.	388
COR. De-là il suit que la différence des tems est comme l'arc décrit.	389
PROBL. Déterminer le tems d'une oscillation d'un pendule qui est retardé dans la raison des vitesses.	Ibid.
PROBL. Déterminer le tems lorsque la résistance est uniforme.	390
Leure de M. Clairaut à M. Saverien,	391

Fin de la Table.

610072







